第30卷第10期　　合肥工业大学学报(自然科学版)　　Vol. 30 No. 10
2007年10月　　JOURNAL OF HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY　　Oct. 2007

基于数值保角变换的高速永磁无刷电机齿槽效应的分析

刘　磊，　唐海源

(合肥工业大学 电气与自动化工程学院,安徽 合肥　230009)

摘　要:对于一种采用永磁体表面放置式的高速无刷永磁直流电机,并且在其转子由套筒所封装的情况下,文章提供了一种改进的齿槽模型来预测其定子开槽对于气隙/套筒/永磁体区域磁场分布的影响;该方法既利用数值积分使保角变换的精度得以提高,又可以很容易地与解析模型相结合,所以不仅与经典模型在计算效率上相近,也保留了解析解的物理直观。

关键词:齿槽效应;保角变换;数值积分

中图分类号:TM351　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1003-5060(2007)10-1310-05

Analysis of the slot effect of high speed brushless PM motors based on numerical conformal transformation

LIU Lei，　TANG Hai-yuan

(School of Electric Engineering and Automation，Hefei University of Technology，Hefei 230009，China)

Abstract: The paper presents an improved method for modeling the effect of stator slotting on the magnetic field distribution in the airgap/sleeve/magnet region of a high speed brushless permanent magnet dc motor equipped with a surface mounted magnet rotor enclosed by a sleeve. By means of numerical integration，conformal transformation is more accurate. The method can be easily combined with the analytical method，so it can provide not only nearly the same efficiency as the classic model but also as much insight as the analytical solution.

Key words: slot effect；conformal transformation；numerical integration

在许多民用与工业领域需要应用高速电机。如果采用一般的电机往往存在损耗大或结构不牢固(如有刷结构)的缺点,所以采用逆变器供电的无刷永磁电机是值得关注的。对这类电机,因为磁路复杂,定子磁动势含有大量时间与空间谐波,分析与设计就要建立在磁场分析的基础上。采用数值方法(如有限元法)虽然可以得到精确的分析结果,但是缺少物理直观,也不便应用于优化设计中,所以有必要提供一种解析方法[1]。

本文以一种无刷直流电机为对象来展开讨论,如图1所示。当无刷直流电机用于高速运行时,为了减少损耗,就要求磁密较低,但为了保证功率密度,则线负荷就比较高。同时为了加强转子的牢固性,转子半径较小,外面又套有一层套筒。转轴一般不采用隔磁处理,而是采用磁导率较高的钢材,从而起到导磁通路的作用。

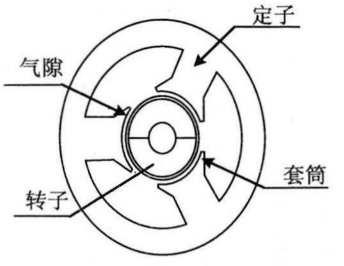


图1　高速永磁无刷直流电机

收稿日期:2006-10-03;**修改日期**:2007-01-15

作者简介:刘　磊(1982—),男,河南平顶山人,合肥工业大学硕士生.

此种用于高速驱动的电机就原理来讲,可以按照一般无刷直流电机的解析方法来求解气隙、套筒及永磁体区域的磁场,而这方面的模型有很多。本文采用一种在极坐标下求解的解析模型[2-5]。优点是在综合考虑了空载磁场和电枢反应磁场的基础上计及定子的齿槽效应。其所依据的叠加原理,对于以高电密、低磁密(饱和度低)为特征的高速电机尤为适用。但是高速电机除了极数少之外,槽口宽度一般也较大,原模型用来考虑齿槽效应的方法有必要重新加以考察。

对于任何电机,如果可以利用叠加原理,则其磁场可以考虑成由空载磁场和电枢反应磁场所合成。在分别获得 2 种磁场后,再利用一种可以考虑导齿槽效应的二维磁导函数,则可以完整地考虑开槽对磁场分布的影响。上文所述模型就是采用这种观点,但是为了简化齿槽效应的分析,对于电机的定子开槽采用了有无限槽深,忽略槽形的单槽模型,如图 2 所示。

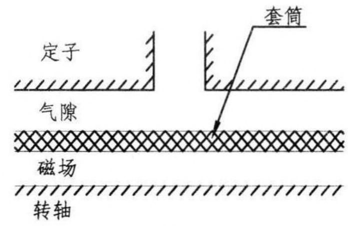
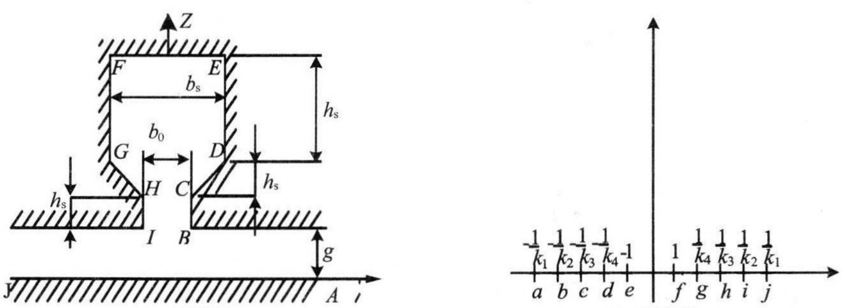


图 2　经典齿槽模型

这种估计明显与高速电机的情况有较大差别。可见是否可以忽略槽形和有限槽深的影响是需要检验的。

1　保角变换模型

采用单齿模型对于高速电机来说是最为合适的,因为这种模型本来就适用于齿数较少或气隙较之槽口宽度较大的情形。值得指出的是,因为气隙较大,所以开槽而减少的每极磁通可以忽略不计。因此,根据 Schwartz-Christoffel 变换建立模型,如图 3 所示。



(a) Z平面　　(b) W平面

图 3　改进齿槽模型

a	$-\frac{1}{k_1}$	0	$+\infty+j0$, $+\infty+jg$
b	$-\frac{1}{k_2}$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{b_0}{2}+jg$
c	$-\frac{1}{k_3}$	$\frac{3}{2}\pi-\theta$	$\frac{b_0}{2}+j(g+h_{s0})$
d	$-\frac{1}{k_4}$	$\frac{\pi}{2}+\theta$	$\frac{b_0}{2}+j(g+h_{s0}+h_{s1})$
e	-1	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{b_0}{2}+j(g+h_s)$

其中,f、g、h、i、j 可以由对称性相应地写出,于是 $z\omega$ 平面的 S-C 变换为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}z/\mathrm{d}\omega = {} & S(\omega+1/k_1)^{-1}(\omega+1/k_2)^{3/2-1}(\omega+1/k_3)^{3/2-\theta/\pi-1}(\omega+1/k_4)^{1/2+\theta/\pi-1}(\omega+1)^{1/2-1}(\omega-1/k_1)^{-1}(\omega-1/k_2)^{3/2-1}(\omega-1/k_3)^{3/2-\theta/\pi-1}(\omega-1/k_4)^{1/2+\theta/\pi-1}(\omega-1)^{1/2-1} \\
= {} & S[(\omega^2-1/k_2^2)^{1/2}/((\omega^2-1)^{1/2}\times(\omega^2-1/k_1^2))][(\omega^2-1/k_3^2)/(\omega^2-1/k_4^2)]^{1/2-\theta/\pi}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

而 ωt 平面的二次变换为

$$t=\Omega[\ln(\omega-1/k_1)-\ln(\omega+1/k_1)]/\pi \tag{2}$$

首先,对于 S 可以由围道积分求得:对于 A 点,在 z 平面上有 $\Delta z=-jg$,而在 ω 平面上,令 $\omega=1/k_1+\rho\,\mathrm{e}^{j\theta}$,因为 $\rho\to 0$,$\theta:\pi\to 0$。

$$\Delta z=-jS\frac{k_1}{2}\left(\frac{1/k_1^2-1/k_2^2}{1/k_1^2-1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1/k_1^2-1/k_3^2}{1/k_1^2-1/k_4^2}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{\theta}{\pi}}\pi$$

令

$$K=\left(\frac{1/k_1^2-1/k_2^2}{1/k_1^2-1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1/k_1^2-1/k_3^2}{1/k_1^2-1/k_4^2}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{\theta}{\pi}}$$

于是

$$S=2g/(\pi k_1K) \tag{3}$$

至于其他参数的确定,则要借助于数值积分[6,7]。对于复平面 z 上的 N 边形,其顶点和内角分别为 Z_i 与 $\alpha_i\pi$,则 CS 变换为

$$Z=S\int_0^{\xi}\prod_{i=1}^{N}(\xi-a_i)^{\alpha_i-1}\mathrm{d}\xi+C \tag{4}$$

设 d_i 为 N 多边形第 i 边的边长，则

$$d_i = |Z_i Z_{i+1}| = \left| S\int_{a_i}^{a_{i+1}} \prod_{j=1}^{N-1} (\xi - a_j)^{\alpha_j - 1} d\xi \right| = (-1)^{\sum\limits_{j=i+1}^{N-1}(\alpha_j - 1)} |S| \int_{a_i}^{a_{i+1}} \prod_{j=1}^{N-1} (\xi - a_j)^{\alpha_j - 1} d\xi = |S| I_i \tag{5}$$

具体到 $I_i = \int_{a_i}^{a_{i+1}} \prod\limits_{j=1}^{N-1}(\xi - a_j)^{\alpha_j - 1} d\xi$，则可以转化为

$$I_i = G\int_0^1 t^\beta (1-t)^\alpha f_i(t) dt \tag{6}$$

其中，$G = (a_{i+1} - a_i)^{\sum\limits_{j=1}^{N-1}(\alpha_j - 1)}$；$f_i(t) = (t - a_1^*)^{\alpha_1 - 1} \cdots (t - a_{i-1}^*)^{\alpha_{i-1}-1} (a_{i+2}^* - t)^{\alpha_{i+2}-1} \cdots (\alpha_{N-1}^* - t)^{\alpha_{N-1}-1}$；$a_j^* = (a_j - a_i)/(a_{i+1} - a_i)$；$j = 1, 2, \cdots, N-1$；$\beta = \alpha_i - 1$；$\alpha = \alpha_{i+1} - 1$。这个含有奇异点的积分可采用 Gauss-Jacobi 型数值积分来求解，依照特征值法来计算 Gauss 节点。积分中的权函数为 $W(t) = (1-t)^\alpha t^\beta$，将对应的正交多项式的递推公式写成矩阵形式，即为

$$t[\boldsymbol{P}(t)] = [\boldsymbol{T}][\boldsymbol{P}(t)] + [\boldsymbol{F}] \tag{7}$$

$$[\boldsymbol{P}(t)] = [\boldsymbol{P}_0^{\alpha,\beta}(t), \boldsymbol{P}_1^{\alpha,\beta}(t), \cdots, \boldsymbol{P}_{N-1}^{\alpha,\beta}(t)]^{\mathrm{T}}$$

$$[\boldsymbol{F}] = [0, 0, \cdots, 0, \boldsymbol{P}_N^{\alpha,\beta}(t)/a_N]^{\mathrm{T}}$$

$$[\boldsymbol{T}] = \begin{bmatrix} -b_1/a_1 & 1/a_1 & 0 \\ c_2/a_2 & -b_2/a_2 & 1/a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{N-1}/a_{N-1} & -b_{N-1}/a_{N-1} & 1/a_{N-1} \\ 0 & c_N/a_N & -b_N/a_N \end{bmatrix}$$

因为 t_j 是 Gauss-Jacobi 结点，所以 $P_N^{\alpha,\beta}(t_j) = 0$，于是问题转化为求特征值问题，即

$$t_j[\boldsymbol{P}(t_j)] = [\boldsymbol{T}][\boldsymbol{P}(t_j)]$$

采用 QR 算法即可得到特征值。最后根据正交性，可以利用特征向量来表示高斯积分的权系数，即

$$\boldsymbol{W}_j = q_{0j}^2 \int_0^1 (1-t)^\alpha t^\beta dt = q_{0j}^2 B(\beta+1, \alpha+1) \tag{8}$$

其中，q_{0j}^2 表示各单位特征向量的第一个元素；$B(\beta+1, \alpha+1)$ 则是常见的特殊函数 Beta 函数。需要注意上面的结论，事实上应当采用规格化正交多项式，但是 Jacobi 多项式用于规格化的范数很繁难，不便在计算时使用。根据递推关系，只要在对应元素上乘以范数的比值即可。

对于$[\boldsymbol{T}]$主对角线的上方副对角线元素 $t_{\cdot j}$，要分别乘以

$$\begin{cases} \sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)/(\alpha+\beta+3)} & (j=1) \\ \sqrt{\dfrac{(j+\alpha)(j+\beta)(2j+\alpha+\beta-1)}{j(2j+\alpha+\beta+1)(j+\alpha+\beta)}} & (j \neq 1) \end{cases}$$

对于$[\boldsymbol{T}]$主对角线的下方副对角线元素 $t_{\cdot j}$，要分别乘以

$$\begin{cases} \sqrt{(\alpha+\beta+3)/[(\alpha+1)(\beta+1)]} & (j=1) \\ \sqrt{\dfrac{(j-1)(2j+\alpha+\beta-1)(j+\alpha+\beta-1)}{(j+\alpha-1)(j+\beta-1)(2j+\alpha+\beta-3)}} & (j \neq 1) \end{cases}$$

这样就完全确定了电机槽部的保角变换的数值积分方程，最终有

$$|S(K)||I_i(K)| = d_i \tag{9}$$

已知的各边边长分别等于对应的 Gauss 型积分，这样确定各个参数 k_i 的问题就转化为一组非线性方程组的零点问题，而且含有约束条件。显然这是一个非线性规划问题。根据采用的保角变换模型，参数 k_i 要满足如下线性约束条件：

$$g(\boldsymbol{K}) = \boldsymbol{AK} - \boldsymbol{b} \geqslant 0 \tag{10}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K} = [k_1, k_2, k_3, k_4]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{b} = [0, 0, 0, 0, -1]^{\mathrm{T}}$$

目标函数为

$$f(\boldsymbol{K}) = \max(||S(\boldsymbol{K})||I_i(\boldsymbol{K})| - d_i|) \quad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{11}$$

于是可以采用 SUMT 方法中的外点法来求解，引入外罚函数

$$\sum_{i=1}^{5} [\min(g_i(\boldsymbol{K}), 0)]^2 \tag{12}$$

即可转化为无约束最优化问题。但是这个问题的求解严重依赖于初始点的选择，极容易陷入局部极小值，不能满足零点的求解。

所以每求解一次都要重新代入(9)式中以观察是否满足零点的条件。如果不能满足就要根据已经求出的极小点重新开始优化。但是这个过程十分漫长。

为了加快向零点的收敛，取一组在 1 以内的随机数，与已经求出的极小点的 1/10 相乘，添加到极小点中作为扰动，事实表明这个措施是有效的。

在确定出所有的参数 k_i，进而得到 S 后，电机齿槽的保角变换模型得以建立。需要指出，这一方法适用于一般的平底槽。

2 齿槽效应的估计

根据图 4 所示的齿槽效应，为了简化分析，一般采用余弦函数来拟合开槽造成的磁密的变化。

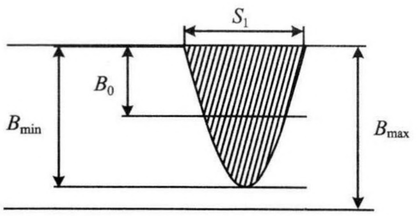


图 4　开槽对气隙磁密的影响

此时可以取磁导函数为：

$$\lambda(r,\alpha)=\begin{cases}\Lambda_0\left[1-\beta(r)-\beta(r)\cos\left(\frac{t_s Q_s}{s_1}\alpha\right)\right] & \left(|\alpha|\leqslant\frac{s_1\pi}{t_s Q_s}\right)\\ \Lambda_0 & \left(\frac{s_1\pi}{t_s Q_s}<|\alpha|\leqslant\frac{\alpha_t}{2}\right)\end{cases} \tag{13}$$

其中，$\beta(r)=(B_{\max}-B_{\min})/2B_{\max}$。

通过将磁通等效为三角形，可以求得

$$\Delta\phi=\frac{1}{2}(B_{\max}-B_{\min})s_1=\mu_0\frac{\Omega_0}{g}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{B}{B_{\max}}\right)\mathrm{d}x \tag{14}$$

于是在确定各个参数并求得 $B_{\max}$ 与 $B_{\min}$ 后，磁导函数 $\lambda(\alpha,r)$ 即可求得。为便于应用，采用标么值 $\bar{\lambda}(r,\alpha)=\lambda(r,\alpha)/\Lambda_{\mathrm{ref}}$，$\Lambda_{\mathrm{ref}}=\mu_0/(g+h_m/\mu_r)$

此外经常将磁导函数展开为 Fourier 级数，即

$$\bar{\lambda}(\alpha,r)=\sum_{w=0}^{\infty}\bar{\Lambda}_w(r)\cos w\,Q_s(\alpha+\alpha_{sa}) \tag{15}$$

其中，a_{sa} 是 A 相绕组轴线与槽中心线之间的空间夹角，而

$$\bar{\Lambda}_w(r)=\begin{cases}1-\beta(r)s_1/t_s\\ -\frac{2}{\pi w}\beta(r)\left[1+\frac{w^2}{\frac{t_s^2}{s_1^2}-w^2}\right]\sin\left(w\pi\frac{s_1}{t_s}\right)\end{cases}$$

可见问题的关键在于给出 $B_{\max}$ 与 $B_{\min}$，根据物理意义不难知道，在 $\omega=\pm 1/k_1$ 处存在最大值，恰好得到 $B_{\max}=\mu_0\Omega_0/g$。至于 $B_{\min}$ 则与半径有关，此时取 $\omega=jv$，根据 CS 变换式不难看出其对应于 z 平面的虚轴，正好得到槽口处不同半径下的磁密，即

$$B_{\min}=\mu_0\frac{\Omega_0}{g}K\frac{(v^2+1)^{1/2}(v^2+1/k_4^2)^{1/2-\theta/\pi}}{(v^2+1/k_2^2)^{1/2}(v^2+1/k_4^2)^{1/2-\theta/\pi}} \tag{16}$$

$v=0$ 时得到定子槽内表面的磁密，其余情况下要确定 v 则需要求解积分，即

$$R_s-r=S\int_0^v\frac{\left(v^2+\frac{1}{k_2^2}\right)^{1/2}}{(v^2+1)^{1/2}\left(v^2+\frac{1}{k_1^2}\right)}\left(\frac{v^2+\frac{1}{k_3^2}}{v^2+\frac{1}{k_4^2}}\right)^{1/2-\theta/\pi}\mathrm{d}v \tag{17}$$

根据这个积分就可以确定半径为 r 时对应的 v，进而得出该半径下的最小磁密。上述的求解涉及到如下 2 个数值积分的求解问题：

（1）求解磁通变化的积分。由 $B=\mu_0|\mathrm{d}t/\mathrm{d}z|=\mu_0\left|\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\omega}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}z}\right|$，可知

$$\frac{B}{B_{\max}}=K\left|\frac{(\omega^2-1)^{1/2}(\omega^2-\frac{1}{k_4^2})^{\frac{1}{2}-\frac{\theta}{\pi}}}{(\omega^2-1/k_2^2)^{1/2}(\omega^2-1/k_3^2)^{\frac{1}{2}-\frac{\theta}{\pi}}}\right| \tag{18}$$

在转子表面上 $|\omega|>1/k_1$，绝对值号可以去掉。而

$$\mathrm{d}x=S\frac{(\omega^2-1/k_2^2)^{1/2}}{(\omega^2-1)^{1/2}(\omega^2-1/k_1^2)}\left(\frac{\omega^2-1/k_3^2}{\omega^2-1/k_4^2}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{\theta}{\pi}}\mathrm{d}\omega$$

于是可以知道积分转化为在 ω 平面上的环路积分，即

$$\Delta\phi=\mu_0\frac{\Omega_0}{g}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{B}{B_{\max}}\right)\mathrm{d}x=$$
$$2\mu_0\frac{\Omega_0}{g}\int_{1/k_1}^{\infty}+\mu_0\frac{\Omega_0}{g}\int_{\substack{R\to\infty\\ \phi:0\to\pi}} \tag{19}$$

第一项实际是实积分，后面一项为在无穷远处的积分，容易证明

$$\left|\mu_0\frac{\Omega_0}{g}\int_{\substack{R\to\infty\\ \phi:0\to\pi}}\right|\propto\frac{1}{R}\to 0$$

同时为便于数值处理，进行换元 $\omega=1/t$ 后可得积分区间有限的积分。但是这个积分的 k_1 点为奇异点，所以积分时要截去一部分区间 $[k_1-\delta,k_1]$，如果适当地选取 δ，使误差处于允许范围内的，即

$$\left|\int_{k_1-\delta}^{k_1}f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon \tag{20}$$

具体是先取 $[0,k_1-\delta]$ 区间进行积分，然后等分 $[k_1-\delta,k_1]$ 区间，求 $[k_1-\delta/2^{k-1},k_1-\delta/2^k]$ 上的积分，显然如果小区间内的积分值小于一定值，则可以看成满足误差要求。为了加快试探进程，要提高积分收敛速度，但又要满足各类函数性态（函数、导数的奇异性），所以不能采用高精度的 Gauss 积分，而采用 Romberg 积分，并利用上述自适应的方法。除了在收敛控制时检查积分的主对角线序列外，还同时对生成的梯形、simpson 序列进行检查，因此可以就不同特性的函数寻找最快的收敛序列。

（2）求解最小磁密的积分。在求最小磁密时出现了(17)式中的积分

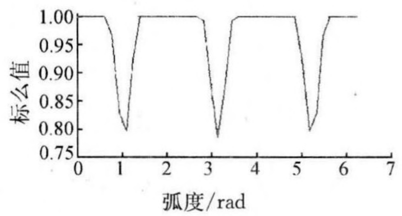
$$I=S\int_0^v\frac{(v^2+1/k_2^2)^{1/2}}{(v^2+1)^{1/2}(v^2+1/k_1^2)}\left(\frac{v^2+1/k_3^2}{v^2+1/k_4^2}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{\theta}{\pi}}\mathrm{d}v \tag{21}$$

很难获得解析解，可以在 x 变化的范围内取一系列数值，转化为定积分计算。但只能得到若干离散值，应用是不方便的。可以用 Cebyishew 级数

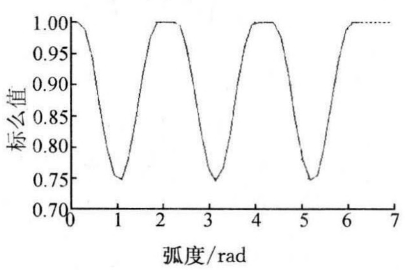
将被积函数展开，而对于有界变差函数总是可以将函数表示为 Cebyishew 多项式的线性组合的，但是注意在应用前应当将 $v\in(0,\infty)$ 转换为 $x\in(-1,+1)$，采用换元 $v=tg\,\frac{\pi}{4}(1+x)$ 即可。具体的逐项积分过程参见文献[8]。

3 结 论

根据上述方法所得结果与采用无穷深槽的简化模型相比，磁导函数有比较明显的差别，如图 5 所示。至于磁导函数的变化趋势则是与原有结果一致的，如图 6 所示。

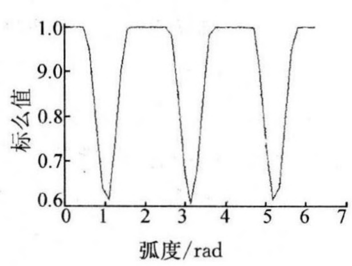


(a) 原模型

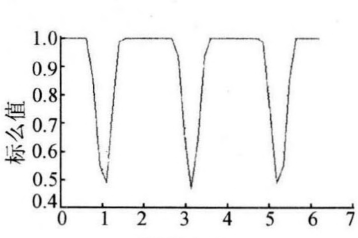


(b) 改进模型

图 5 不同模型下磁导函数的比较



(a) $r=0.83$ cm



(b) $r=0.93$ cm

图 6 不同半径下磁导函数

从结果可以看出，由于气隙磁密在齿部的集中效应，定子槽内的磁密迅速地衰减到只有气隙磁密的一成左右，但是衰减是从 C 点之后才明显的。所以可以推断是槽形特征导致了磁导函数与经典模型的不一致。而经典模型的适用性是由于槽口的深度与气隙相比确实可以假定为无限槽深，此类高速电机中是不符合实际情况的。此外，C 点衰减这一明显的特征为进一步简化模型提供了启发。简化是必要的，因为根据已有的结果，采用数值积分来确定参数涉及到非线性方程组的求解，这一过程往往是繁杂的，精确度也受到限制，而且本身也不是从磁密分布来直接分析齿槽效应的，又忽略了电机的曲率与槽之间的关系。可以认为这是一种半解析的方法，对改进解析模型有启发意义。

就本文而言，可尝试取消槽口以上诸节点以简化保角变换模型的节点数，同时忽略掉槽部的非直角倾角，即可利用椭圆函数来求解这一问题，获得解析结果。其简化的合理性有待进一步考察。

参 考 文 献

[1] Bianchi N, Bolognani S, Luise F. Analysis and design of a brushless motor for high speed operation[C]//Electric Machines and Drives Conference, Vol 1. 2003:44—51.

[2] Zhu Z Q, Howe D, Bolte E, et al. Instantaneous magnetic field distribution in brushless permanent magnet dc motors, Part Ⅰ: open-circuit field[J]. IEEE transaction on Magnetics, 1993, 29, (1): 124—135.

[3] Zhu Z Q, Howe D. Instantaneous magnetic field distribution in brushless permanent magnet dc motors, Part Ⅱ～Ⅳ: armature-reaction field[J]. IEEE Transaction on Magnetics, 1993, 29(1): 136—158.

[4] 王 刚，许汉珍，顾王明，等. 数值许瓦尔兹-克力斯托夫变换与数值高斯-雅可比型积分[J]. 海军工程学院学报，1994,(2):25—33.

[5] Davis P J, Rabinowitz P. 数值积分法[M]. 冯振兴，伍富良，译. 北京：高等教育出版社，1986:74—75.

[6] 冯 康. 数值计算方法[M]. 北京：国防工业出版社，1973:57—62.

[7] 余 俊，廖道训. 最优化方法及其应用[M]. 武汉：华中工学院出版社，1984:87—93.

[8] 汤蕴璆. 电机内的电磁场[M]. 北京：科学出版社，1998:67—98.

(责任编辑 张 镅)