

文章编号: 1000-7598-(2006)04-0561-05

考虑孔隙变形的孔隙介质本构关系初探

邵龙潭, 孙益振

(大连理工大学 工程力学系工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024)

摘 要: 孔隙存在是孔隙介质材料结构的本质特征, 它决定了孔隙介质的本构关系呈现更为复杂的性质。首先给出了孔隙介质的视应力、视应变、骨架实际应力和骨架实际应变的定义, 并在理想孔隙介质的物质模型假定下讨论了理想孔隙介质的本构关系, 表明即使孔隙介质的骨架结构满足虎克弹性体本构关系的假定, 即假定骨架的实际应力与实际应变之间呈现线性关系, 但由于孔隙的存在, 孔隙介质的视应力与视应变之间还是呈现非线性, 说明应力与应变之间的非线性是孔隙介质的固有特性。

关 键 词: 孔隙介质; 实际应力; 实际应变; 视应力; 视应变; 本构关系

中图分类号: TU 452

文献标识码: A

Primary study of stress-strain constitutive relation for porous media

SHAO Long-tan, SUN Yi-zhen

(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: The existing of voids is the character of the porous media, which determine the constitution relation of porous media will be more complicated. A model of ideal porous media is presented. The apparent stress and apparent strain, actual stress and actual strain of skeleton for porous medium are defined. A discussion of the stress-strain relationship of the ideal porous medium suggests that although skeleton structure could be satisfied with the hypothesis of stress-strain linear elastic, the relationship between apparent stress and apparent strains remains nonlinear character. The nonlinear relation of stress and strain is the character of porous media.

Key words: porous media; actual stress; actual strain; apparent stress; apparent strain; constitutive relation

1 引 言

固体材料可以分为连续介质材料和孔隙介质材料。一种固体材料, 当其物质微元在不小于其分子或原子直径的尺度上连续地分布于所占据的整个空间时, 可以称为连续介质材料, 反之, 则可以称为孔隙介质材料。现有描述孔隙介质材料的各种本构关系模型几乎都是建立在连续介质模型基础上的, 难以准确反映出孔隙介质的特性。本文给出了孔隙介质的骨架实际应力与骨架实际应变的定义, 提出理想孔隙介质的假想物质模型, 并讨论了孔隙介质的应力-应变本构关系。

2 孔隙介质应力和应变的定义

2.1 骨架视应力与骨架实际应力

在连续介质力学中, 一点上的应力定义为在作

用在单元体表面积 Δs 上内力平均值的极限^[1], 但是, 对于孔隙介质或土而言, 由于孔隙和颗粒分布的空间不连续性, Δs 趋近到孔隙或颗粒尺寸时其表示的或者只是孔隙或者只是颗粒的面积, 于是应力的定义失去原有的物理意义。因此, 在研究孔隙介质的物理力学特性时, 必须首先定义一个能表征孔隙介质空间一点物理力学特征量的代表性微元体积 (REV), 以在 REV 上用该物理力学特征量的平均值表征该点的平均值, 这些特征量在整个孔隙介质空间内满足数学上的连续条件。Relph (1969 年) 在讨论干土的应力定义时指出, 讨论土内某一点的应力时必须想象一个足够大的点, 这个足够大的点也就是代表性微元体积。Jacob Bear (1982 年) 提出了更为准确的关于 REV 的定义^[2], 指出不管取在孔隙介质的哪个位置 REV 都必须包含固相颗粒和孔隙, 其中状态变量的平均值不依赖于它的大小和形

收稿日期: 2004-08-30

修改稿收到日期: 2004-12-03

基金项目: 教育部高等学校骨干教师资助计划资助 (No. 2000-65); 留学回国人员科研启动基金资助项目 (No. 2001-345)。

作者简介: 邵龙潭, 男, 1963 年生, 博士, 教授, 主要从事岩土力学试验技术、水土保持、岩土工程灾害与防治方面的研究工作。

E-mail: shaolongtan@china.com

状, 并且状态变量平均值的分布在空间和时间上又是根据需要可以任意阶连续的。如果用 l 表示代表性微元的特征长度, d 表示固体骨架颗粒的特征长度, 则 $l \gg d$; 同时 REV 相对于孔隙介质整体而言又足够小, 如果 L 是特征量发生变化的孔隙介质区域的特征长度, 则 $l < L$ [3]。

为了准确表达孔隙介质应力的定义, 以骨架体系作为研究对象, 首先取一脱离体分析其受力。孔隙介质骨架中的每一个颗粒(质点)受到重力和来自于与之相接触的颗粒质点的作用力, 当变形稳定后重力和接触点作用力的共同作用使骨架质点处于静力平衡状态, 脱离体上的面力就是平衡其内部的重力和接触作用力的内力。

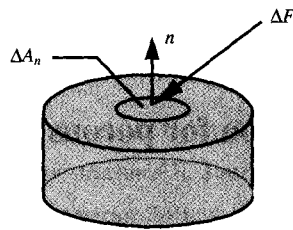
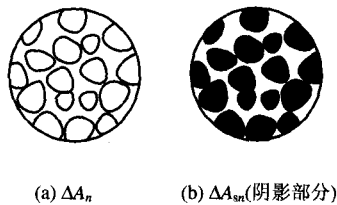


图1 作用在子平面 ΔA_n , ΔA_{sn} 上的面力
Fig.1 Surface force on area ΔA_n , ΔA_{sn}

孔隙介质的视应力也可称为表观应力, 是在所观察到的孔隙介质所占据的整个空间面积上定义的。设 S_r 为 REV 特征长度意义下的面积, 考虑一系列收敛于 P 点(任意点)的子平面 ΔA_n ($n=0, 1, 2$), 如图1所示。图中, ΔA_n 为子平面的面积; ΔA_{sn} 为在子平面中相应于 ΔA_n 的骨架颗粒的面积; ΔA_n 和 ΔA_{sn} 的定义如图2所示; ΔN_n 和 ΔT_n 为作用在 ΔA_n 的力 ΔF 在法线和剪切方向上的分量。土体内一点 P 上骨架的视应力定义为

$$\sigma = \lim_{\substack{\Delta A_n \rightarrow S_r \\ S_r \rightarrow 0}} \frac{\Delta N_n}{\Delta A_n}; \quad \tau = \lim_{\substack{\Delta A_n \rightarrow S_r \\ S_r \rightarrow 0}} \frac{\Delta T_n}{\Delta A_n} \quad (1)$$



(a) ΔA_n (b) ΔA_{sn} (阴影部分)

图2 ΔA_n 和 ΔA_{sn} 的定义

Fig.2 The definition of ΔA_n and ΔA_{sn}

骨架实际应力是骨架内力在骨架颗粒所占据的实际断面面积上的平均值, 定义为

$$\sigma_s = \lim_{\substack{\Delta A_{sn} \rightarrow S_r \\ S_r \rightarrow 0}} \frac{\Delta N_n}{\Delta A_{sn}}; \quad \tau_s = \lim_{\substack{\Delta A_{sn} \rightarrow S_r \\ S_r \rightarrow 0}} \frac{\Delta T_n}{\Delta A_{sn}} \quad (2)$$

式中 S_r 为在 REV 上是尺度上的面积, 称为代表性面积。

式(1)和式(2)的含义是应力特征量在 S_r 上均化后再取极限值。用 σ 和 τ 表示骨架的视应力, σ_s 和 τ_s 表示骨架的实际应力, 骨架的视应力和实际应力之间有如下关系:

$$\sigma_s = \frac{1}{1-n} \sigma; \quad \tau_s = \frac{1}{1-n} \tau \quad (3)$$

2.2 骨架视应变与骨架实际应变

为了简单起见, 首先就一维问题来分析孔隙介质的变形与应变。图3为一个由孔隙介质形成的底面积为1的柱体, 设变形前该柱体的长度为 L , 其中骨架颗粒占据的空间长度为 L_s , 孔隙率为 n , 则

$$L_s = (1-n)L \quad (4)$$

定义骨架的轴向实际应变和轴向视应变为

$$\varepsilon_s = \Delta L_s / L_s \quad (5)$$

$$\varepsilon = \Delta L / L \quad (6)$$

对式(4)求全导数, 则可得到骨架轴向应变与视应变的关系:

$$\varepsilon_s = \varepsilon - \Delta n / (1-n) \quad (7)$$

推广到一般情况, 在三维条件下可以导出骨架实际应变与视应变的关系(加下标 s 表示为实际应变, 不加下标 s 则表示为视应变):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{sx} &= \varepsilon_x - \frac{\Delta n}{(1-n)}; \quad \varepsilon_{sy} = \varepsilon_y - \frac{\Delta n}{(1-n)}; \\ \varepsilon_{sz} &= \varepsilon_z - \frac{\Delta n}{(1-n)}; \\ \gamma_{sxy} &= \gamma_{xy}; \quad \gamma_{syx} = \gamma_{yx}; \quad \gamma_{syz} = \gamma_{yz}; \quad \gamma_{syz} = \gamma_{yz} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

上述结果表明, 即使不考虑微元体变形过程中的质量变化, 骨架结构的视应变既与骨架实际应变有关, 又与孔隙率及其变化有关。

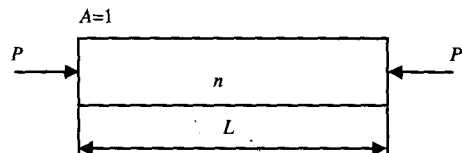


图3 理想孔隙介质柱

Fig.3 Ideal porous medium column

根据式(5)和式(6)骨架的轴向实际应变和视应变的定义, 可以推导出骨架的实际泊松比 ν_s 与

视泊松比 μ 的关系式:

$$\nu_s = \frac{1-\mu}{2\mu} \quad (9)$$

可以看出, 当 $\mu < 0.5$ 时, $\nu_s > 0.5$; 当 $\mu > 0.5$ 时, $\nu_s < 0.5$ 。试验研究中也发现视泊松比 μ 有小于零和大于 0.5, 甚至大于 1 的情况^[4, 5], 因此本次研究中考虑 ν_s 取值范围为 0~2 的情况。

3 理想孔隙介质的物质模型

在对真实孔隙介质的应力-应变本构关系进行初步研究的时候, 为了使问题简化, 需要对真实孔隙介质作出某些基本假定, 以抽象出理想孔隙介质的概念, 即满足下述条件的一种假想物质模型:

- (1) 骨架质点在接触点上没有屈服变形;
- (2) 骨架实际应力与骨架实际应变之间的关系符合广义虎克定律;
- (3) 孔隙介质变形过程中在 REV 内满足质量守恒条件;
- (4) 在骨架内所有的孔隙都是连通的。

除了以上的假定外, 为了分析问题的方便, 在接下来的讨论中还需给定小变形和材料均质、各相同性的条件。

4 理想孔隙介质的本构方程

4.1 骨架实际应力与骨架实际应变的增量关系

取骨架结构作为应力-应变分析的独立研究对象, 骨架实际应力与骨架实际应变之间的关系符合广义虎克定律。在理想孔隙介质的假定下可以写出骨架实际应力与骨架实际应变之间的物理关系式:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{sx} &= \frac{1}{E_s} [\sigma_{sx} - \nu_s (\sigma_{sy} + \sigma_{sz})]; \\ \varepsilon_{sy} &= \frac{1}{E_s} [\sigma_{sy} - \nu_s (\sigma_{sx} + \sigma_{sz})]; \\ \varepsilon_{sz} &= \frac{1}{E_s} [\sigma_{sz} - \nu_s (\sigma_{sx} + \sigma_{sy})]; \\ \gamma_{sxy} &= \frac{\tau_{sxy}}{G_s}; \gamma_{syx} = \frac{\tau_{syx}}{G_s}; \gamma_{syz} = \frac{\tau_{syz}}{G_s}; \gamma_{szy} = \frac{\tau_{szy}}{G_s}; \gamma_{szx} = \frac{\tau_{szx}}{G_s}; \gamma_{sxz} = \frac{\tau_{sxz}}{G_s} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中 ε_{sx} , ε_{sy} , ε_{sz} 为骨架实际正应变; γ_{sxy} , γ_{syx} , γ_{syz} , γ_{szy} , γ_{szx} , γ_{sxz} 为骨架实际工程剪应变; σ_{sx} , σ_{sy} , σ_{sz} 为骨架实际正应力; τ_{sxy} , τ_{syx} , τ_{syz} , τ_{szy} , τ_{szx} , τ_{sxz} 为骨架实际剪应力;

$G_s = \frac{E_s}{2(1+\nu_s)}$, E_s , ν_s 为骨架质点体系的杨氏弹性模量和泊松比, G_s 为骨架质点体系的剪切弹性模量。

如果 E_s 和 ν_s 为常量, 骨架实际应力与骨架实际

应变之间的关系也可以写成增量形式, 以矩阵形式表达:

$$\Delta \sigma_s = D_s \Delta \varepsilon_s \text{ 或 } \Delta \varepsilon_s = D_s^{-1} \Delta \sigma_s \quad (11)$$

其中

$$\Delta \sigma_s = \{\Delta \sigma_{sx}, \Delta \sigma_{sy}, \Delta \sigma_{sz}, \Delta \tau_{sxy}, \Delta \tau_{syx}, \Delta \tau_{syz}, \Delta \tau_{szy}, \Delta \tau_{szx}, \Delta \tau_{sxz}\}^T,$$

$$\Delta \varepsilon_s = \{\Delta \varepsilon_{sx}, \Delta \varepsilon_{sy}, \Delta \varepsilon_{sz}, \Delta \gamma_{sxy}, \Delta \gamma_{syx}, \Delta \gamma_{syz}, \Delta \gamma_{szy}, \Delta \gamma_{szx}, \Delta \gamma_{sxz}\}^T,$$

分别为骨架实际应力增量矩阵和骨架实际应变增量

$$\text{矩阵, } D_s = \begin{bmatrix} \lambda_s + 2G_s & \lambda_s & \lambda_s & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda_s + 2G_s & \lambda_s & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda_s + 2G_s & 0 & 0 & 0 \\ & & & G_s & 0 & 0 \\ & & & & G_s & 0 \\ & & & & & G_s \end{bmatrix} \text{ 为孔}$$

隙介质骨架的弹性矩阵, $\lambda_s = \frac{\nu_s}{(1+\nu_s)(1-2\nu_s)} E_s$ 。

4.2 骨架视应力与视应变的增量关系

由方程式 (3) 骨架实际应力与骨架视应力之间的关系, 可以得到当孔隙率发生变化时骨架应力增量与视应力增量之间的关系表达式:

$$\Delta \sigma_s = \frac{1}{1-n} \Delta \sigma + \frac{\Delta n}{(1-n)^2} \sigma \quad (12)$$

式中 $\Delta \sigma$ 为视应力增量矩阵; σ 为视应力矩阵; Δn 为孔隙率增量, 忽略骨架颗粒体积应变增量时 $\Delta n = (1-n) \Delta \varepsilon_v$ 。将式 (8) 写成增量形式: $\Delta \varepsilon_s = \Delta \varepsilon - \Delta \varepsilon_v$, 又将式 (8) 和式 (12) 代入式 (11), 有

$$\Delta (\varepsilon - \varepsilon_n) = D_s^{-1} (\Delta \sigma + \Delta \varepsilon_v \sigma) / (1-n) \quad (13)$$

$$\text{亦即 } \Delta \varepsilon = D_s^{-1} (\Delta \sigma + \Delta \varepsilon_v \sigma) / (1-n) + \Delta \varepsilon_n \quad (14)$$

其中 $\Delta \varepsilon_n = \{\Delta \varepsilon_v, \Delta \varepsilon_v, \Delta \varepsilon_v, 0, 0, 0\}^T$ 。由此可以发现, 即使骨架实际应力与实际应变之间满足线性弹性关系, 视应力与视应变之间也不满足线性弹性关系, 其不仅与孔隙率有关, 而且还与视体积应变有关。

5 三轴应力条件下的理想孔隙介质柱的应力-应变关系

对于图 4 所示的三轴加载孔隙介质柱, 虽然增加围压使轴向应力-应变曲线会变陡^[6], 但围压在小范围内变化时, 则对计算结果影响很小。本文中对围压 σ_r 的变化对计算结果的影响未作研究, 并忽略其自重应力及可能存在的初应力的影响, 在计算时围压 σ_r 取为试验中采用的 σ_r 为 0.2 MPa, 讨论试样在 $\Delta \sigma_z$ 作用下的视应变与视应力的关系。

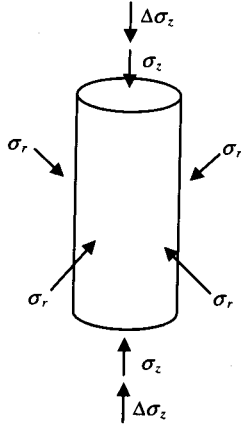


图4 三轴加载条件下的孔隙介质柱
Fig.4 Porous medium column with triaxial loading

在理想孔隙介质模型的假定下, 试样的骨架实际应力与骨架实际应变的增量关系可以写成

$$\Delta \varepsilon_{sz} = \frac{1}{E_s} (\Delta \sigma_{sz} - 2\nu_s \Delta \sigma_{sr}) \quad (15)$$

$$\Delta \varepsilon_{sr} = -\frac{1}{E_s} [\Delta \sigma_{sr} - \nu_s (\Delta \sigma_{sz} + \Delta \sigma_{sr})] \quad (16)$$

用视应力和视应变表示为

$$\Delta \varepsilon_z - \Delta \varepsilon_v = \frac{1}{(1-n)E_s} [\Delta \sigma_z + \Delta \varepsilon_v \sigma_z - 2\nu_s (\Delta \sigma_r + \Delta \varepsilon_v \sigma_r)] \quad (17)$$

$$\Delta \varepsilon_r - \Delta \varepsilon_v = -\frac{1}{(1-n)E_s} \nu_s \cdot [\Delta \sigma_r + \Delta \varepsilon_v \sigma_r - \nu_s (\Delta \sigma_z + \Delta \sigma_r + \Delta \varepsilon_v \sigma_z + \Delta \varepsilon_v \sigma_r)] \quad (18)$$

式中 $\Delta \varepsilon_v = \Delta \varepsilon_v - \Delta \varepsilon_{sv}$, $\Delta \varepsilon_{sv} \approx 0$, 并且 $\Delta \varepsilon_v = \Delta \varepsilon_z + 2\Delta \varepsilon_r$ 。由于孔隙介质颗粒体的体积应变非常小, 因此可以被忽略, 联立方程 (17) 式 (18) 可解得:

$$\Delta \varepsilon_v = \frac{2\nu_s - 1}{2(1-n)E_s - (2\nu_s - 1)(\sigma_z + 2\sigma_r)} \Delta \sigma_z \quad (19)$$

$$\Delta \varepsilon_z = \frac{1}{(1-n)E_s} [\Delta \sigma_z + \Delta \varepsilon_v (\sigma_z - 2\nu_s \sigma_r)] + \Delta \varepsilon_v \quad (20)$$

图5为定 E_s , n_0 , σ_r , ν_s 值时轴向应力与轴向应变的关系曲线。虽然图中的骨架的视应力与视应变的非线性关系表现得不很明显, 但可以看出, 由于孔隙的存在和骨架实际泊松比的取值不同使得骨架的视应力与视应变关系明显区别于线弹性变形的试样。对于考虑了孔隙变形而引起的视应力-应变

之间的非线性关系, 从图6应变增量与偏差应力的关系曲线中比较直观的看出, 当 $\nu_s > 0.5$ 时试样表现为体积压缩, 但 $\Delta \varepsilon_v$ 随荷载增加而逐渐减小, 轴向应变 $\Delta \varepsilon_z$ 也随之减小。

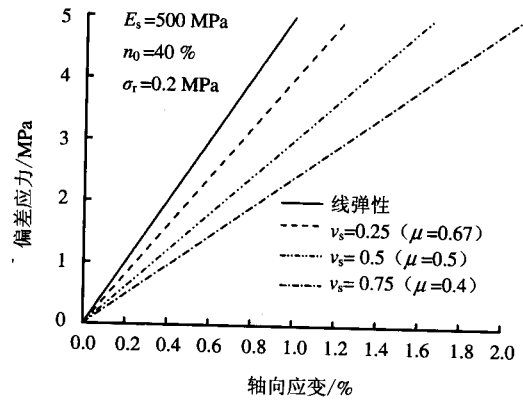


图5 三轴加载条件下的孔隙介质柱的应力-应变关系
Fig.5 The relation of axial stress and strain for porous medium column with triaxial loading

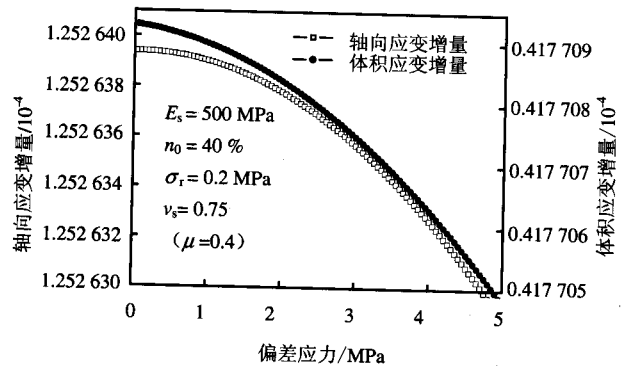
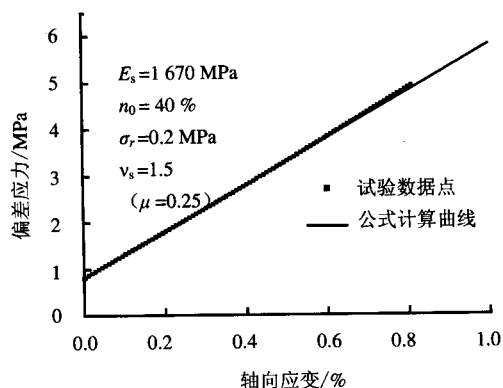


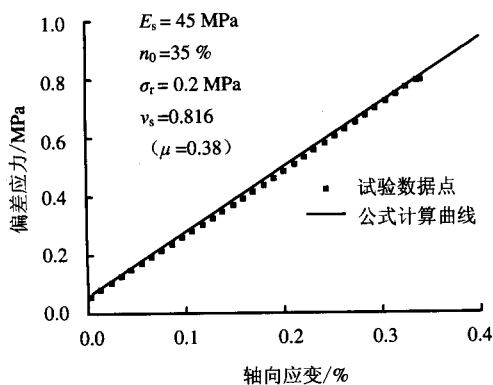
图6 轴向应变增量和体积应变增量-偏差应力关系曲线
Fig.6 Curves of strain increment vs. axial loading

为了说明和验证在理想孔隙介质假定下推导出的骨架视应力与视应变的关系的正确性, 在试验室中模拟了近似理想孔隙介质柱体三轴条件下的加载试验。首先, 用福建标准砂和少量水泥加工了一个近似于理想孔隙介质柱的试样, 在三轴条件下进行了循环加卸载试验, 目的是为了消除骨架颗粒间弹性变形之外的其它变形, 诸如颗粒滑移、滚动和破碎等变形。由于没有自由颗粒, 试验的变形很快就达到稳定变形状态。图7(a)给出的试验数据点是循环加卸载变形稳定后的一段加载条件下的试验点, 该段试验数据点的试验条件为: $E_s = 1670 \text{ MPa}$, $n_0 = 40\%$, $\sigma_r = 0.2 \text{ MPa}$, $\nu_s = 1.5 (\mu = 0.25)$, $\Delta \sigma_0 = 0.8 \text{ MPa}$ 。在此条件下利用本文推导的公式进行了计算, 计算曲线与试验结果吻合。对于多次加卸载循环变形稳定后的散粒体材料, 虽然达到变形稳定经历的循环次数比较多, 但利用本文公式计

算得出的应力-应变曲线同样也能很好拟合试验结果, 见图 7(b)。该段试验数据点的试验条件为: $E_s = 450 \text{ MPa}$, $n_0 = 35\%$, $\sigma_r = 0.2 \text{ MPa}$, $\nu_s = 0.816$ ($\mu = 0.38$), $\Delta\sigma_0 = 0.056 \text{ MPa}$ 。上述试验结果与文中公式计算结果吻合较好, 但只是对于多次加卸载循环变形稳定之后孔隙介质柱的加载分支视应力-应变曲线的试验数据, 对于卸载曲线和包含了其它变形的情况尚不能模拟, 因此孔隙介质的变形机理仍需更深入地研究。



(a)



(b)

图7 试验结果和公式计算结果

Fig.7 The results of test and calculation

6 结论

理想孔隙介质为一个理想化的物质模型, 在自然界中并不存在, 而真实的孔隙介质其应力-应变关系将会更复杂。通过上面的讨论可以得到如下结论:

- (1) 骨架的实际应力与骨架的视应力和孔隙率有关, 实际应变不仅与视应变以及孔隙率有关, 还与孔隙率的变化有关。
- (2) 即使骨架的实际应力与实际应变之间满足

线弹性关系, 孔隙介质的视应力与视应变关系也会由于孔隙率的存在而呈现非线性, 不仅受到孔隙率的影响, 还与视体积应变有关。

- (3) 当考虑了孔隙率及其变化的影响时, 对于三轴加载的孔隙介质柱, 视应力和视应变的关系是非线性的。

- (4) 对于只包含骨架颗粒间弹性变形的孔隙介质柱, 视应力-应变关系曲线的试验结果与文中公式计算结果吻合较好, 但对于其余情况尚不能模拟, 孔隙介质的变形机理需进一步完善。

参考文献

- [1] Lawrence E, Malvern. Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium[M]. [s. l.]: [s. n.], 1969.
- [2] Bear J, Bachmat Y. Transport phenomena in porous media-basic equations[A]. **Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media**[C]. Boston: Martinus Nijhoff, 1984. 3-62.
- [3] 邵龙潭. 孔隙介质力学分析方法及其在土力学中的应用[D]. 大连: 大连理工大学, 1996.
- [4] 徐志伟, 殷宗泽. 粉砂侧向变形特性的真三轴试验研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2000, 19(5): 626-629.
XU Zhi-wei, YIN Zong-ze. Study on deformation characteristic of silt by true triaxial test[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2000, 19(5): 626-629.
- [5] 陆永青, 计三有, 戴诗亮, 等. 散体材料弹性参数的估计[J]. 武汉交通科技大学学报, 1997, 21(2): 178-185.
LU Yong-qing, JI San-you, DAI Shi-liang, et al. Estimate of elastic parameters for granular material[J]. **Chinese Journal of Wuhan Transportation University**, 1997, 21(2): 178-185.
- [6] 王学滨, 潘一山, 盛谦, 等. 岩体假三轴压缩及变形局部化剪切带数值模拟[J]. 岩土力学, 2001, 22(3): 323-326.
WANG Xue-bin, PAN Yi-shan, SHENG Qian, et al. Simulation of triaxial compression and localization of deformation[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2001, 22(3): 323-326.