

文章编号:1000-1301(2003)03-0041-06

## 半无限空间界面附近 SH 波对圆形衬砌的散射

齐辉,王艳,刘殿魁

(哈尔滨工程大学建筑工程学院,黑龙江 哈尔滨 150001)

**摘要:**建立了求解半无限空间中 SH 波对浅埋圆形衬砌结构的散射与动应力集中问题的解析方法。利用 SH 波散射的对称性和多极坐标的方法,在复平面上构造出了一个可以预先满足半空间自由表面上应力自由的边界条件的浅埋圆形衬砌对稳态 SH 波散射的波函数,并构造出衬砌内的散射波函数。然后根据衬砌周围的边界条件,将该问题转化为对一组无穷代数方程组的求解。最后给出了具体算例,并讨论了其数值结果。

**关键词:**SH 波散射;半无限空间;动应力集中;浅埋圆形衬砌结构

中图分类号:P315.31

文献标识码:A

### Dynamic analysis of shallow-embedded lining structure by incident SH-wave

Qi Hui, WANG Yan, LIU Dian-Kui

(Civil Engineering College, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

**Abstract:** An analytic method is developed for the problem of dynamic stress concentration of a shallow-embedded circular lining structure impacted by the steady SH-wave in this paper. The first important thing is to construct a scattering wave function in the medium based upon the symmetry of scattering of SH-wave and the method of multipolar coordinates system, which satisfies the condition of stress free at the ground surface of the half-space containing a shallow-embedded circular lining structure, and then the scattering wave functions for the lining structure are constructed. Using the boundary conditions around the lining structure, the solution of the problem can be reduced to a series of algebraic equations. Finally, numerical examples are provided and discussed.

**Key words:** scattering of SH-waves; dynamic stress concentration; half-space; shallow-embedded circular lining structure

## 1 引言

研究弹性波对地下结构的散射是地震工程学的重要课题。对于深埋结构(不考虑地面影响),其计算方法较为成熟,并已开始指导工程设计,SH 波对界面圆孔的分析,也有了一些成果<sup>[8-9]</sup>。而对浅埋结构(必须考虑地面影响)的分析与计算,则尚不完善<sup>[1]</sup>,且多数为理论和数学方法的研究。其中,著名的分析方法有波函数叠加法和渐近匹配法(MAE)<sup>[2]</sup>。衬砌结构是工程中常见的结构形式,在抗震问题的研究中具有十分重要的意义。本文就弹性波散射中最简单的模型——稳态 SH 波对浅埋衬砌结构的散射问题进行了研究。

收稿日期:2003-08-20;修回日期:2003-05-10

基金项目:国家自然科学基金资助项目(59578003);博士点基金资助项目(9521702)

作者简介:齐辉(1963-),男,副教授,博士,主要从事固体波理论及其应用研究

在求解该问题时,关键是利用 SH 波散射的对称性和多极坐标方法构造一个能自动满足水平地面上应力自由边界条件的散射波。本文所研究的稳态情况,完全可以使用 Fourier 的综合技术将结构中的稳态动应力状态转换到“时域”,即可完成浅埋结构在受随时间变化的任意 SH 波冲击作用之下的动力分析<sup>[3]</sup>。

## 2 基本理论

### 2.1 控制方程

在各向同性介质中研究弹性波在孔洞周围的散射问题,最为简单的模型就是反平面剪切运动的 SH 波模型。入射 SH 波在  $xy$  平面内的所激发的位移  $W(x, y, t)$  垂直于  $xy$  平面,且与  $z$  轴无关。引入复变量  $z = x + iy$ ,  $\bar{z} = x - iy$ , 在复平面  $(z, \bar{z})$  上,对于稳态入射情况,位移  $W(z, \bar{z}, t)$  要满足运动方程:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{1}{4} k^2 W = 0 \quad (1)$$

其中:  $W$  为位移函数,位移函数与时间的依赖关系为  $e^{-i\omega t}$ , (以下略去时间谐和因子  $e^{-i\omega t}$ )。  $k = \frac{\omega}{c_s}$ ,  $\omega$  为位移

$W(x, y, t)$  的圆频率;  $c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$  为介质的剪切波速;  $\rho, \mu$  分别为介质的质量密度和剪切模量。

相应的应力表达式为:

$$\tau_{xz} = \mu \left( \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} \right), \tau_{yz} = i\mu \left( \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} \right) \quad (2)$$

$$\text{而在极坐标系中, } \tau_{rz} = \mu \left( \frac{\partial W}{\partial z} e^{i\theta} + \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} e^{-i\theta} \right), \tau_{\theta z} = i\mu \left( \frac{\partial W}{\partial z} e^{i\theta} - \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} e^{-i\theta} \right) \quad (3)$$

### 2.2 界面附近圆形衬砌引起的散射波

半无限空间中浅埋圆形衬砌结构的模型如图 1 所示。

#### 2.2.1 区域 I 中的散射波

现在利用 SH 波散射的对称性和多极坐标的方法构造圆形衬砌结构激发的区域 I 内的散射波  $W_I^{(s)}$ , 要求它除满足方程 (1) 和无穷远处的辐射条件之外, 还能满足半空间的自由表面上应力自由的条件。

在复平面  $(z, \bar{z})$  上,  $W_I^{(s)}$  可以写成:

$$W_I^{(s)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \left\{ \begin{aligned} &H_n^{(1)}(k|z+hi|) \left[ \frac{z+hi}{|z+hi|} \right]^n \\ &+ H_n^{(1)}(k|z-hi|) \left[ \frac{z-hi}{|z-hi|} \right]^{-n} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

而在复平面  $(z_1, \bar{z}_1)$  上, 散射波  $W^{(s)}$  有:

$$W_I^{(s)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \left\{ H_n^{(1)}(k|z_1|) \left[ \frac{z_1}{|z_1|} \right]^n + H_n^{(1)}(k|z_1-2hi|) \left[ \frac{z_1-2hi}{|z_1-2hi|} \right]^{-n} \right\} \quad (5)$$

在极坐标系中, 相应的应力可表示为:

$$\tau_{r_1 z_1, l}^{(s)} = \frac{k\mu}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \left\{ H_{n-1}^{(1)}(k|z_1|) \left[ \frac{z_1}{|z_1|} \right]^{n-1} e^{i\theta_1} - H_{n+1}^{(1)}(k|z_1|) \left[ \frac{z_1}{|z_1|} \right]^{n+1} e^{-i\theta_1} \right. \\ \left. + \left[ -H_{n+1}^{(1)}(k|z_1-2hi|) \left[ \frac{z_1-2hi}{|z_1-2hi|} \right]^{-(n+1)} e^{i\theta_1} + H_{n-1}^{(1)}(k|z_1-2hi|) \left[ \frac{z_1-2hi}{|z_1-2hi|} \right]^{-(n+1)} e^{-i\theta_1} \right] \right\} \quad (6)$$

$$\tau_{\theta_1 z_1, l}^{(s)} = i \frac{k\mu}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \left\{ H_{n-1}^{(1)}(k|z_1|) \left[ \frac{z_1}{|z_1|} \right]^{n-1} e^{i\theta_1} + H_{n+1}^{(1)}(k|z_1|) \left[ \frac{z_1}{|z_1|} \right]^{n+1} e^{-i\theta_1} \right. \\ \left. + \left[ -H_{n+1}^{(1)}(k|z_1-2hi|) \left[ \frac{z_1-2hi}{|z_1-2hi|} \right]^{-(n+1)} e^{i\theta_1} - H_{n-1}^{(1)}(k|z_1-2hi|) \left[ \frac{z_1-2hi}{|z_1-2hi|} \right]^{-(n+1)} e^{-i\theta_1} \right] \right\} \quad (7)$$

#### 2.2.2 区域 II 中的散射波

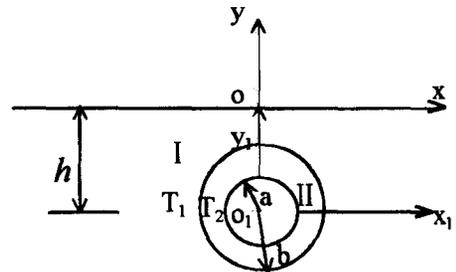


图 1 半无限空间浅埋圆形衬砌的模型

在复平面上( $z_1, \bar{z}_1$ )上,SH波在衬砌内外周边激起的散射波可以写成:

$$W_{T_1\Pi}^{(s)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \left\{ H_n^{(2)}(k|z_1|) \left[ \frac{z_1}{|z_1|} \right]^n \right\} \quad (8)$$

$$W_{T_2\Pi}^{(s)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \left\{ H_n^{(1)}(k|z_1|) \left[ \frac{z_1}{|z_1|} \right]^n \right\} \quad (9)$$

相应的应力分别为:

$$\tau_{r|z_1, T_1, \Pi}^{(s)} = \frac{k\mu}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \left\{ H_{n-1}^{(2)}(k|z_1|) \left[ \frac{z_1}{|z_1|} \right]^{n-1} e^{i\theta_1} - H_{n+1}^{(2)}(k|z_1|) \left[ \frac{z_1}{|z_1|} \right]^{n+1} e^{-i\theta_1} \right\} \quad (10)$$

$$\tau_{\theta|z_1, T_1, \Pi}^{(s)} = i \frac{k\mu}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \left\{ H_{n-1}^{(2)}(k|z_1|) \left[ \frac{z_1}{|z_1|} \right]^{n-1} e^{i\theta_1} + H_{n+1}^{(2)}(k|z_1|) \left[ \frac{z_1}{|z_1|} \right]^{n+1} e^{-i\theta_1} \right\} \quad (11)$$

$$\tau_{r|z_1, T_2, \Pi}^{(s)} = \frac{k\mu}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \left\{ H_{n-1}^{(1)}(k|z_1|) \left[ \frac{z_1}{|z_1|} \right]^{n-1} e^{i\theta_1} - H_{n+1}^{(1)}(k|z_1|) \left[ \frac{z_1}{|z_1|} \right]^{n+1} e^{-i\theta_1} \right\} \quad (12)$$

$$\tau_{\theta|z_1, T_2, \Pi}^{(s)} = i \frac{k\mu}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \left\{ H_{n-1}^{(1)}(k|z_1|) \left[ \frac{z_1}{|z_1|} \right]^{n-1} e^{i\theta_1} + H_{n+1}^{(1)}(k|z_1|) \left[ \frac{z_1}{|z_1|} \right]^{n+1} e^{-i\theta_1} \right\} \quad (13)$$

### 3 问题的解答

#### 3.1 入射波

在一个完整的弹性半空间中,有一个稳态的SH波 $W^{(i)}$ 入射,则在界面上就会产生一个反射的SH波 $W^{(r)}$ 。在复平面上分别可以写成:

$$w^{(i)} = W_0 e^{i\frac{k}{2}[(z-ih) \cdot e^{-i\alpha_0} + (z+ih) \cdot e^{i\alpha_0}] - e^{-i\omega t}} \quad (14)$$

$$w^{(r)} = W_0 e^{i\frac{k}{2}[(z-ih) \cdot e^{-i\alpha_0} + (z+ih) \cdot e^{-i\alpha_0}] - e^{i\omega t}} \quad (15)$$

其中, $W_0$ 为入射波的波幅。

而 $W^{(i)}$ 与 $W^{(r)}$ 相对应的应力为:

$$\tau_{rz}^{(i)} = i\tau_0 \cos(\theta - \alpha_0) e^{i\frac{k}{2}[(z-ih) \cdot e^{-i\alpha_0} + (z+ih) \cdot e^{i\alpha_0}] - e^{-i\omega t}} \quad (16)$$

$$\tau_{\theta z}^{(i)} = -i\tau_0 \sin(\theta - \alpha_0) e^{i\frac{k}{2}[(z-ih) \cdot e^{-i\alpha_0} + (z+ih) \cdot e^{i\alpha_0}] - e^{-i\omega t}} \quad (17)$$

和

$$\tau_{rz}^{(r)} = i\tau_0 \cos(\theta + \alpha_0) e^{i\frac{k}{2}[(z-ih) \cdot e^{i\alpha_0} + (z+ih) \cdot e^{-i\alpha_0}] - e^{-i\omega t}} \quad (18)$$

$$\tau_{\theta z}^{(r)} = -i\tau_0 \sin(\theta + \alpha_0) e^{i\frac{k}{2}[(z-ih) \cdot e^{i\alpha_0} + (z+ih) \cdot e^{-i\alpha_0}] - e^{-i\omega t}} \quad (19)$$

#### 3.2 边界条件

研究SH波对浅埋圆形衬砌散射的问题,将衬砌所激发区域I中的散射波取为式(4)的形式,即可自动满足水平表面 $\alpha(y=0)$ 上应力自由的条件。

另外,在 $T_1$ 处,介质和衬砌的边界处应力和位移连续;在 $T_2$ 处,应力自由。

在复平面( $z_1, \bar{z}_1$ )上,边界条件可以表示为:

$$\begin{cases} W^{(i)} + W^{(r)} + W_1^{(s)} = W_{T_1, \Pi}^{(s)} + W_{T_2, \Pi}^{(s)} & \text{在 } T_1 \text{ 处} \\ \tau_{r|z_1}^{(i)} + \tau_{r|z_1}^{(r)} + \tau_{r|z_1, I}^{(s)} = \tau_{r|z_1, T_1, \Pi}^{(s)} + \tau_{r|z_1, T_2, \Pi}^{(s)} & \text{在 } T_1 \text{ 处} \\ \tau_{r|z_1, T_1, \Pi}^{(s)} + \tau_{r|z_1, T_2, \Pi}^{(s)} = 0 & \text{在 } T_2 \text{ 处} \end{cases} \quad (20)$$

将以上所求的位移和应力的表达式代入式(20),用 $e^{-im\theta_1}$ 分别乘

以方程的两边,并在区间 $(-\pi, \pi)$ 上积分,可得到如下的一组无穷代数方程组:

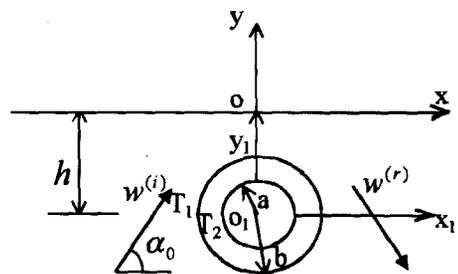


图2 沿角 $\alpha_0$ 入射的SH波作用于浅埋圆形衬砌的模型

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \begin{bmatrix} \zeta_{mn}^{(11)} & \zeta_{mn}^{(12)} & \zeta_{mn}^{(13)} \\ \zeta_{mn}^{(21)} & \zeta_{mn}^{(22)} & \zeta_{mn}^{(23)} \\ \zeta_{mn}^{(31)} & \zeta_{mn}^{(32)} & \zeta_{mn}^{(33)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_m^{(1)} \\ \zeta_m^{(2)} \\ \zeta_m^{(3)} \end{bmatrix} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (21)$$

利用截断有限项的方法解出上述方程组,就可以确定未知系数  $A_n, B_n$  和  $C_n$ 。

## 4 动应力集中系数(DSCF)

在入射的稳态 SH 波作用之下,浅埋圆形衬砌附近的动应力分布可以通过求解以上的问题得出,但求得动应力集中系数则是重要的任务之一。在本问题中,主要研究衬砌外边缘介质内的 DSCF 和衬砌内边缘的 DSCF。

通常动应力集中系数  $\tau_{\theta_1 z}^*$  可写成:  $\tau_{\theta_1 z}^* = |\tau_{\theta_1 z}^{(i)} / \tau_0|$  (22)

即: 在  $T_1$  处  $\tau_{\theta_1 z, T_1, I}^* = |(\tau_{\theta_1, z_1}^{(i)} + \tau_{\theta_1, z_1}^{(r)} + \tau_{\theta_1, z_1, T_1, I}^{(s)}) / \tau_0|$  (23)

在  $T_2$  处  $\tau_{\theta_1 z, T_2, II}^* = |(\tau_{\theta_1, z_1, T_1, II}^{(s)} + \tau_{\theta_1, z_1, T_2, II}^{(s)}) / \tau_0|$  (24)

其中,  $\tau_0 = \mu k W_0$  为入射应力的最大幅值。

## 5 算例及结果分析

在本问题中,影响动应力集中系数的无量纲参数有:(1)波数比  $k_2/K_1$ ; (2)剪切模量比  $\mu_1/\mu_2$ ; (3)厚度比  $b/a$ ; (4)波数  $ka$ ; (5)圆形衬砌的中心到水平地面的距离与衬砌内半径的比值  $h/a$ 。

作为算例,给出了以下两种情况的无量纲参数值,其中,第一种情况列出的值可以认为是典型的花岗岩中有混凝土衬砌;第二种则是在花岗岩中有钢衬砌的情况。

表1 无量纲参数值

	情况 I	情况 II
$k_2/k_1$	1.50	0.70
$\mu_1/\mu_2$	2.90	0.31
$b/a$	1.05, 1.10, 1.20	1.05, 1.10, 1.20

图3 ~ 图5 给出了 DSCF 的分布情况和变化规律:

(1) 动应力集中系数 DSCF 的分布:图3中的(a)、(c)、(e)和(g)给出了具有不同波数的 SH 波,沿水平方向和垂直方向入射时,在  $h/a = 1.5$  时沿衬砌内边界  $T_2$  处 DSCF 的分布规律。而(b)、(d)、(f)和(h)给出了沿衬砌外边界  $T_1$  处介质内的 DSCF 的分布规律。可以看出, DSCF 的变化规律与简单圆孔时的情况相似。当  $\alpha_0 = 0^\circ$ , 即水平入射时, DSCF 的最大值出现在  $\theta_1 = 90^\circ$ , 且在第一种情况下, 介质与衬砌相比相对较硬, 介质内的 DSCF 的最大值约为 5.4, 和简单圆孔时的情况大致相同。此时介质内  $T_1$  处 DSCF 的最大值约为 4.0, 比简单圆孔的小 26%。在第二种情况下, 介质与衬砌相比相对较软, 此时介质内的 DSCF 最大值显著降低, 大约为 3.6, 比简单圆孔时的情况降低 32% 左右。当  $\alpha_0 = 90^\circ$ , 即垂直入射时, DSCF 的最大值大致出现在  $\theta_1 = 10^\circ \sim 20^\circ$ , 和水平入射相似, 在第一种情况下, 介质内  $T_1$  处 DSCF 的最大值约为 3.0, 和简单圆孔的 3.2 相比相差不多。而在第二种情况下, 则在 2.7 左右, 比简单圆孔降低 15% 左右。这表明, 硬的衬砌可以有效地减小介质内的应力。

(2) 动应力集中系数 DSCF 与波数  $ka$  的关系:图4中的(a)、(c)、(e)和(g)给出了沿水平方向和垂直方向入射的 SH 波对不同半径比的圆形衬砌, 在  $\theta_1 = 0^\circ$  时介质内  $T_2$  处 DSCF 随波数  $ka$  的变化规律。可以看出, 与简单圆孔时的情况相似, 大约在  $ka = 0.5 \sim 0.9$  这一范围内, DSCF 出现最大值。在第一种情况下, 随着  $b/a$  的增大, 即衬砌厚度的增加, 介质内的 DSCF 减小, 而衬砌内的 DSCF 增加。在第二种情况下, 则正好相反。同时, 垂直入射时 DSCF 最大值比水平入射时的情况增加 4 ~ 5 倍。因此, 可以通过适当增加衬砌厚度的方法, 来降低介质内的应力, 并且在设计时慎重考虑垂直入射的情况。

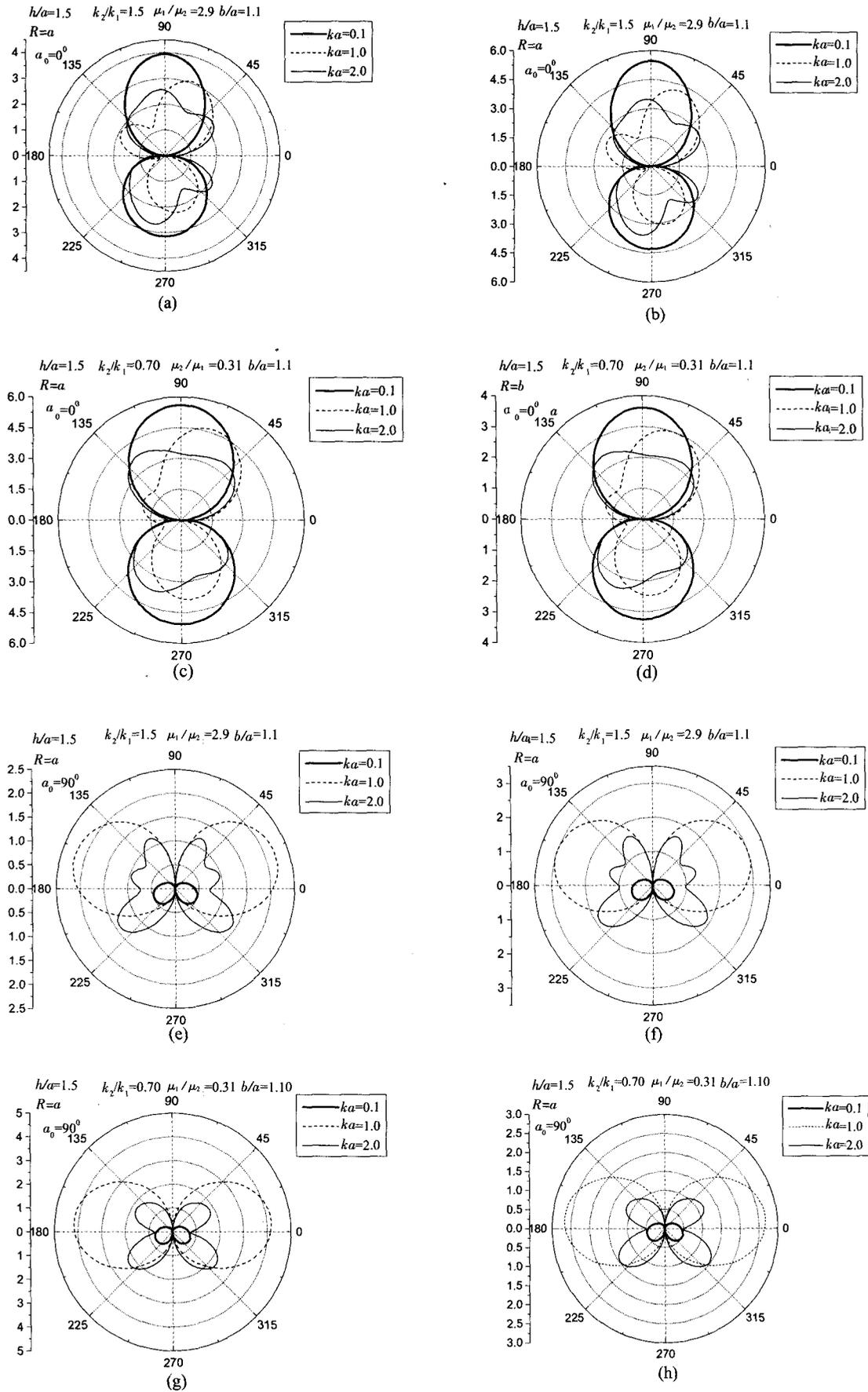


图3 动应力集中系数 DSCF 分布图

(3) 动应力集中系数 DSCF 与埋深  $h/a$  的关系:图 5 给出了具有不同波数  $ka$  的 SH 波,沿水平方向和垂直方向入射时,在  $\theta_1 = 0^\circ$  时介质内  $T_2$  处 DSCF 随埋深  $h/a$  的变化规律。水平入射时,在  $ka = 0.1$  的低频情况下,呈现出明显的静力学特征,当  $h/a > 15.0$  时,DSCF 趋近于一个常数。随着频率的增加,则表现出震荡性,DSCF 沿深度方向周期性地变化并不断减小。垂直入射时,则周期性变化的趋势更加明显。

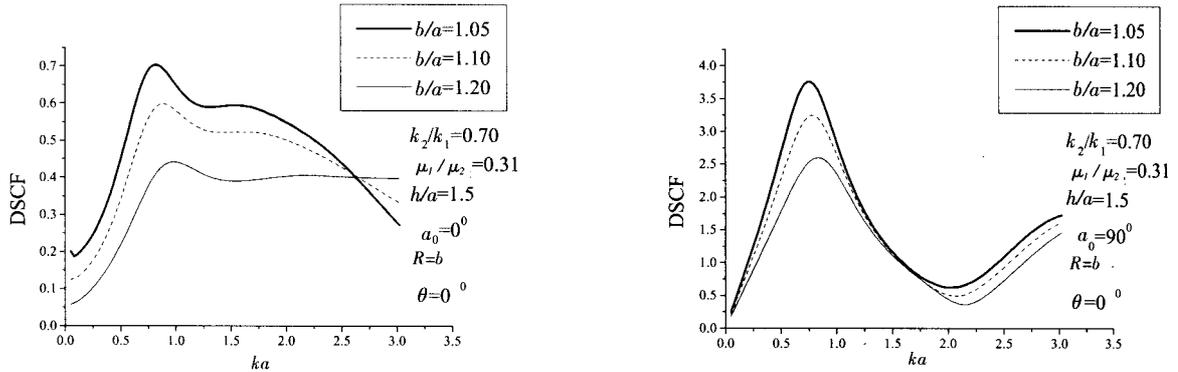


图 4 动应力集中系数 DSCF 随波数  $ka$  的变化

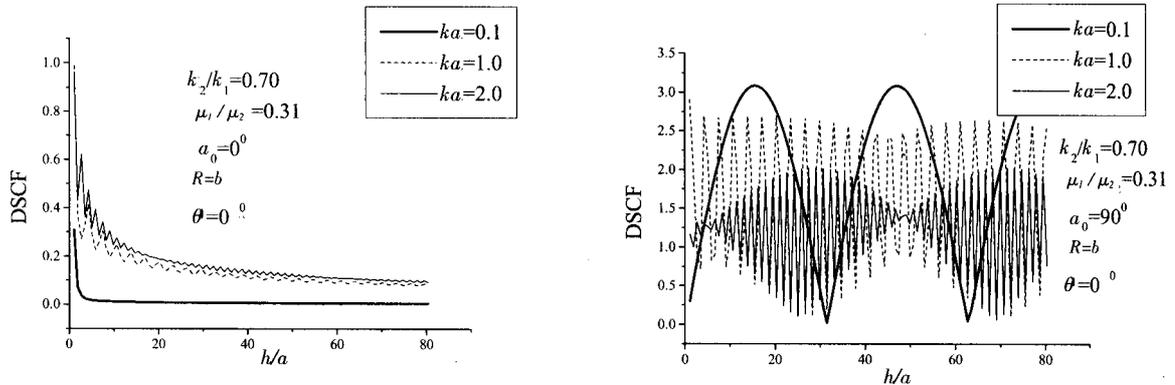


图 5 动应力集中系数 DSCF 随埋深  $h/a$  的变化

## 参考文献:

- [1] 林皋,地下结构抗震分析综述(上)[J].世界地震工程,1999,15(2):1-10
- [2] Pao. Yih-hsing, Applied mechanics in science and engineering[J]. Applied Mechanics Review, 1998 51(2):141-153
- [3] Pao. Y. H. and Mow. C. C. The Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations[M]. Crane & Russak, New York, 1973
- [4] R. D. Gregory, An Expansion Theorem Applicable to Problems of Wave Propagation in an Elastic Half Space Containing a Cavity[J]. Proc Camb, Philos Soc. 63(1967):1341-1367
- [5] Gregory. R. D. Propagation of Waves in an Elastic Half Space Containing a Circular Cylindrical Cavity[J]. Proc. Camb. Philos. Soc. 67(1970):689-710
- [6] S. K. Datta, Diffraction of SH-Waves by an Elliptic Cylinder[J]. Int. J. Solid and Str. 10(1974):123-133
- [7] Liu D. K. Gai. B. Z. and Tao G. Y., Applications of the Method of Complex Function to Dynamic Stress Concentration[J]. Wave motion, 1982(4):293-304
- [8] 刘殿魁,刘宏伟. SH波散射与界面圆孔附近的动应力集中[J].力学学报,1998,30(5):597-604
- [9] 史守峡,刘殿魁.SH波与界面多圆孔的散射及动应力集中[J].力学学报,2001(1):60-70