

文章编号:1673-5005(2008)02-0114-05

# 采用分数阶导数描述胶凝原油的流变模型

王志方, 张国忠, 刘刚

(中国石油大学 储运与建筑工程学院, 山东 东营 257061)

**摘要:**提出了采用分数阶导数的新流变模型理论来描述胶凝原油蠕变特性和动态粘弹特性的方法。由 Maxwell 体和分数阶导数的类 Kelvin 体组合建立了类 Burgers 体流变模型,并推导得到了分数阶导数类 Burgers 体的蠕变柔量表达式。试验验证了该模型能精确描述胶凝原油的蠕变过程,而经典的标准粘弹性固体模型和粘弹性流体模型都不能很好地拟合蠕变试验曲线。试验还验证了分数阶导数的类 Kelvin 体和类标准线性体都能精确描述胶凝原油的动态粘弹性能,而经典的标准粘弹性固体模型同样也不能很好地拟合动态粘弹试验曲线。

**关键词:**分数阶导数; 胶凝原油; 粘弹性; 流变模型; 蠕变模型

**中图分类号:**TE 832.3 **文献标识码:**A

## A description of rheological model for gelled crude oil using fractional order derivatives

WANG Zhi-fang, ZHANG Guo-zhong, LIU Gang

(College of Transport & Storage and Civil Engineering in China University of Petroleum,  
Dongying 257061, Shandong Province, China)

**Abstract:** A new rheological model with fractional order derivatives was proposed to describe the creep characteristics and dynamic viscoelasticity of gelled crude oil. The quasi-Burgers rheological model was established by combining the Maxwell model and the quasi-Kelvin model with fractional order derivatives, from which the creep compliance expression of Burgers model with fractional order derivatives was derived. Experimental results show that this model is capable of describing the creeping process of the gelled crude oil precisely, while the classic models for viscoelastic solids and for viscoelastic fluids can not fit the experimental creep curve well. Experimental results also show that both the quasi-Kelvin model with fractional order derivative and the quasi-standard linear model can describe the dynamic viscoelasticity exactly, while the classic models for viscoelastic solids cannot fit the experimental creep curve well.

**Key words:** fractional order derivatives; gelled crude oil; viscoelasticity; rheological model; creep model

胶凝原油具有比较复杂的结构特性,受到剪切作用后,会表现出复杂的弹性形变、粘弹性蠕变和结构裂解等流变特性<sup>[1-2]</sup>。管道停输再启动过程中,胶凝原油的流变特性对管道再启动的安全性有重大影响<sup>[3-4]</sup>。目前对胶凝原油粘弹性的研究和认识较少,通常是采用小振幅振荡剪切试验的方法测得动态性能,定性地描述胶凝原油粘弹性结构参数随测量温度、振荡频率和剪切应力等因素的变化规律<sup>[5-7]</sup>。笔者提出采用分数阶导数的新流变模型理论来描述胶凝原油的粘弹特性,推导得到胶凝原油的蠕变柔量和

储存模量表达式。

## 1 采用分数阶导数的粘弹性流变模型

经典的粘弹性流变模型理论具有直观易懂、物理概念清晰等优点,其缺点是在描述粘弹性材料流变行为时不能与实验数据很好地吻合。采用分数阶导数的模型理论能够保留经典模型理论的优点,克服其缺点<sup>[8]</sup>。分数阶导数的流变模型理论实质上就是用 Abel 粘壶取代 Newton 粘壶。

收稿日期:2007-07-02

作者简介:王志方(1980-),男(汉族),山东单县人,博士研究生,主要从事油气长距离管道输送技术研究。

### 1.1 分数阶导数的定义

$$D^\gamma[f(t)] = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(t-\tau)}{\tau^\gamma} d\tau = \frac{d}{dt} \int_0^t I_\gamma(\tau) f(t-\tau) d\tau = I_\gamma(t) f(0) + \int_0^t I_\gamma(\tau) \frac{d}{dt} f(t-\tau) d\tau,$$

令  $s = t - \tau$ , 则

$$D^\gamma[f(t)] = I_\gamma(t) f(0) + \int_0^t I_\gamma(t-s) df(s) = I_\gamma(t) * df. \quad (1)$$

式中,  $D^\gamma$  为分数微分算子, 是整数微分算子  $D$  的推广。

Abel 核的定义为

$$I_\gamma(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)t^\gamma}, & t > 0; \\ 0, & t \leq 0, 0 \leq \gamma < 1. \end{cases}$$

式中,  $\Gamma$  为 gamma 函数。

可见分数阶导数作用于函数  $f(t)$  上就等于 Abel 核  $I_\gamma(t)$  与函数  $f(t)$  的广义 Stieltjes 卷积<sup>[9]</sup>。

将式(1)用于应变得到 Abel 粘壶的本构关系:

$$\sigma(t) = \eta D^\gamma[\varepsilon(t)] = \eta I_\gamma * d\varepsilon,$$

其中,  $\eta$  为 Abel 粘壶的粘性系数。

### 1.2 粘弹性流变模型

采用分数阶导数描述胶凝原油的粘弹性流变模型理论是以线性弹簧、Abel 粘壶、Newton 粘壶为基本元件进行串、并联组合, 这里只研究一维剪应力状态下的结果。

#### 1.2.1 类 Kelvin 体

对于符合分数阶导数 Kelvin 固体模型的粘弹性体, 由线性弹簧和 Abel 粘壶并联组成, 其剪应力  $\sigma$  与应变  $\varepsilon$  关系为

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \eta D^\gamma[\varepsilon(t)]. \quad (2)$$

式中,  $E$  为分数阶导数类 Kelvin 模型中线性弹簧的弹性模量。

对式(2)进行 Fourier 变换:  $\sigma(\omega) = E\varepsilon(\omega) + \eta(i\omega)^\gamma \varepsilon(\omega)$ 。由复数模量的定义可得分数阶导数 Kelvin 模型的复数模量为

$$G^*(\omega) = \frac{\sigma(\omega)}{\varepsilon(\omega)} = E + \eta i^\gamma \omega^\gamma = G'(\omega) + iG''(\omega),$$

其中

$$\text{储存模量: } G'(\omega) = E + \eta \omega^\gamma \cos \frac{\gamma\pi}{2}, \quad (3)$$

$$\text{损耗模量: } G''(\omega) = \eta \omega^\gamma \sin \frac{\gamma\pi}{2}. \quad (4)$$

分数阶导数类 Kelvin 模型的储存模量为幂函数、三角余弦函数的多项式, 其损耗模量为幂函数和三角正弦函数的乘积。而经典 Kelvin 模型的储存模量为一次幂, 其损耗模量为  $\omega$  的一次幂。

#### 1.2.2 类标准线性体

分数阶导数的类标准线性体等价于 Rabotnov 体<sup>[10]</sup>, 可用于描述粘弹性固体, 由线性弹簧与分数阶导数类 Kelvin 体串联而成, 其剪应力与应变关系为

$$(E_1 + E_2 + \eta_2 D^\gamma)\sigma(t) = (E_1 E_2 + E_1 \eta_2 D^\gamma)\varepsilon(t). \quad (5)$$

式中,  $E_1$  为线性弹簧的弹性模量;  $E_2$  为分数阶导数类 Kelvin 模型中线性弹簧的弹性模量;  $\eta_2$  为分数阶导数类 Kelvin 模型中 Abel 粘壶的粘性系数。

对式(5)进行 Fourier 变换后移项得复数模量

$$G^*(\omega) = \frac{\sigma(\omega)}{\varepsilon(\omega)} = \frac{E_\infty + E_0 \beta^{-1} (i\omega)^\gamma}{1 + \beta^{-1} (i\omega)^\gamma}, \quad (6)$$

$$\beta = \frac{E_1 + E_2}{\eta_2}, E_\infty = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}, E_0 = E_1.$$

用式(6)中分母的共轭同乘分子与分母, 分开实部与虚部后得储存模量  $G'$ 、损耗模量  $G''$  分别为

$$G'(\omega) = \frac{E_\infty + (E_0 + E_\infty)\beta^{-1}\omega^\gamma \cos \frac{\gamma\pi}{2} + E_0\beta^{-2}\omega^{2\gamma}}{1 + 2\beta^{-1}\omega^\gamma \cos \frac{\gamma\pi}{2} + \beta^{-2}\omega^{2\gamma}}, \quad (7)$$

$$G''(\omega) = \frac{(E_0 - E_\infty)\beta^{-1}\omega^\gamma \sin \frac{\gamma\pi}{2}}{1 + 2\beta^{-1}\omega^\gamma \cos \frac{\gamma\pi}{2} + \beta^{-2}\omega^{2\gamma}}. \quad (8)$$

分数阶导数类标准线性体模型的储存模量是频率的分数幂及其余弦的函数, 其损耗模量是频率的分数幂、正弦与余弦的函数。而标准线性体模型的储存模量为频率二次幂的函数, 其损耗模量为频率一次幂和二次幂的函数。

#### 1.2.3 类 Burgers 体

本文中建立的分数阶导数类 Burgers 体可用于描述具有粘性流的粘弹性固体, 它由经典模型的 Maxwell 体与分数阶导数的 Kelvin 体串联而成, 其一维剪应力状态下的本构方程为

$$\left(E_1 + \eta_1 D^\gamma + \frac{E_2 \eta_2 D}{E_2 + \eta_2 D}\right)\sigma(t) = \frac{(E_1 + \eta_1 D^\gamma)E_2 \eta_2 D}{E_2 + \eta_2 D}\varepsilon(t). \quad (9)$$

式中,  $E_1$  为分数阶导数 Kelvin 模型中线性弹簧的弹性模量;  $\eta_1$  为分数阶导数 Kelvin 模型中 Abel 粘壶的

粘性系数;  $E_2$  为 Maxwell 体模型中线性弹簧的弹性模量;  $\eta_2$  为 Maxwell 体模型中 Newton 粘壶的粘性系数。

其蠕变本构方程为

$$\varepsilon(t) = \left[ \frac{1}{\eta_2} \frac{1}{D} + \frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_1} \frac{1}{(1 + \beta^{-1} D^\gamma)} \right] \sigma(t). \quad (10)$$

其中

$$\beta = \frac{E_1}{\eta_1}.$$

以  $\sigma(t) = \theta(t)$  代入式(10)得到的  $\varepsilon(t)$  便是蠕变柔量  $J(t)$ 。将  $\sigma(t) = \theta(t)$  代入式(10)进行 Laplace 变换,再反演得

$$J(t) = J_0 + (J_\infty - J_0) L^{-1} \frac{1}{(1 + \beta^{-1} p^\gamma) p} + \frac{1}{\eta_2} L^{-1} p^{-2}. \quad (11)$$

其中

$$J_\infty = \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2}, J_0 = \frac{1}{E_2}.$$

由展开级数再逐项反演可得

$$L^{-1} \frac{1}{(1 + \beta^{-1} p^\gamma) p} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n \beta^{n+1} t^{(n+1)\gamma}}{\Gamma[(n+1)\gamma + 1]}.$$

因此,蠕变柔量  $J(t)$  为

$$J(t) = J_0 \left[ 1 + \left( \frac{J_\infty}{J_0} - 1 \right) \sum_0^\infty \frac{(-1)^n \beta^{n+1} t^{(n+1)\gamma}}{\Gamma[(n+1)\gamma + 1]} \right] + \frac{1}{\eta_2} t. \quad (12)$$

去掉末项的粘性流项,就是经典的粘弹性固体 Rabotnov 模型的蠕变柔量表达式<sup>[9]</sup>。

式(12)中含有无穷级数和 gamma 函数,形式复杂,应用不方便,计算速度慢,需要进行简化。在式中无穷级数内添加  $n = -1$  项,同时在无穷级数外减去此项,式(12)可变化为

$$J(t) = J_\infty - (J_\infty - J_0) \sum_{n=0}^\infty \frac{(-\beta t^\gamma)^n}{\Gamma[n\gamma + 1]} + \frac{1}{\eta} t, \quad (13)$$

其中

$$\eta = \eta_2.$$

令  $\gamma = 1 - \alpha, 0 \leq \alpha < 1$ ,则式(13)变为

$$J(t) = J_\infty - (J_\infty - J_0) \sum_{n=0}^\infty \frac{(-\beta t^{1-\alpha})^n}{\Gamma[n(1-\alpha) + 1]} + \frac{1}{\eta} t. \quad (14)$$

由于胶凝原油粘弹蠕变过程与时间密切相关,为了保留蠕变时间的指数系数,只对无穷级数内 gamma 函数进行简化,令  $\alpha = 0$ ,则式(14)可变为

$$J(t) = J_\infty - (J_\infty - J_0) \sum_{n=0}^\infty \frac{(-\beta t^{1-\alpha})^n}{\Gamma(n+1)} + \frac{1}{\eta} t. \quad (15)$$

由  $\Gamma(n+1) = n!, e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ ,式(15)

变为

$$J(t) = J_\infty - (J_\infty - J_0) \exp(-\beta t^{1-\alpha}) + \frac{1}{\eta} t. \quad (16)$$

式(16)就是分数阶导数类 Burgers 体流变模型蠕变柔量表达式,若  $\alpha = 0$ ,即  $\gamma = 1$ ,则化为粘弹性流体 Burgers 模型。粘弹性流体 Burgers 模型蠕变柔量表达式为

$$J(t) = J_\infty - (J_\infty - J_0) e^{-\beta t} + \frac{1}{\eta} t. \quad (17)$$

## 2 试验及模型验证

### 2.1 试验

试验仪器:本试验采用德国产的高测量精度 Physica MCR301 可控应力流变仪。

试验油样:试验所用油样为 N-Y 含蜡原油,其凝点为 34 °C,反常点为 38 °C,胶质含量为 26.4%,沥青质含量为 0.33%,蜡含量为 26.3%。

试验过程:将预处理过的油样加热温度均设为 50 °C,然后以 0.5 °C/min 的冷却速率静态冷却至测量温度 32 °C,再恒温 40 min,以使胶凝结构充分形成,然后分别进行频率扫描实验和 5, 10, 12.5, 15 Pa 恒应力蠕变实验。

### 2.2 试验结果与计算结果对比

#### 2.2.1 胶凝原油的粘弹性蠕变

图 1 为 10 Pa 和 15 Pa 恒应力作用下蠕变柔量类 Burgers 体蠕变模型式(16)的拟合曲线。由图 1 看出分数阶导数类 Burgers 体流变模型能精确描述胶凝原油的蠕变过程,并且拟合 5 Pa 和 12.5 Pa 恒应力作用下的蠕变柔量曲线也具有同样的效果。用类 Burgers 体蠕变模型拟合不同应力下蠕变试验曲线的相关参数见表 1。

表 1 流变模型的拟合参数

| 应力 $\sigma/\text{Pa}$ | 长期蠕变柔量 $J_\infty/\text{Pa}^{-1}$ | 瞬时蠕变柔量 $J_0/\text{Pa}^{-1}$ | $\beta$ | $\alpha$ | 粘度 $\eta/(\text{MPa} \cdot \text{s})$ |
|-----------------------|----------------------------------|-----------------------------|---------|----------|---------------------------------------|
| 5                     | 0.00172                          | 0.000192                    | 0.01662 | 0.484    | 54                                    |
| 10                    | 0.00174                          | 0.00019                     | 0.01604 | 0.476    | 56                                    |
| 12.5                  | 0.00202                          | 0.0002                      | 0.016   | 0.488    | 40                                    |
| 15                    | 0.00301                          | 0.00022                     | 0.0106  | 0.463    | 19                                    |

从表 1 中看出,随着剪切应力的增大,长期蠕变柔量  $J_\infty$  和瞬时蠕变柔量  $J_0$  逐渐增加,而在较小应力

5 Pa 和 10 Pa 作用下基本不变,且  $\beta, \alpha, \eta$  也基本不变,即蠕变柔量表达式相同,说明胶凝原油在较小剪应力作用下表现出线性粘弹性。随着应力的不断增大,胶凝原油会表现出非线性粘弹性。蠕变时间的相关系数  $\beta$  随着应力的增加而增大,且  $\alpha$  基本不变,表明应力越大相应的应变延迟特性时间越短,即延迟

弹性应变增大到其最大值所需时间越短。同时随着应力的增大蠕变粘度  $\eta$  越小,说明应力越大原油的胶凝结构受损程度越大。由此不同应力下类 Burgers 体流变模型参数的变化规律反映了胶凝原油的粘弹性结构特性。

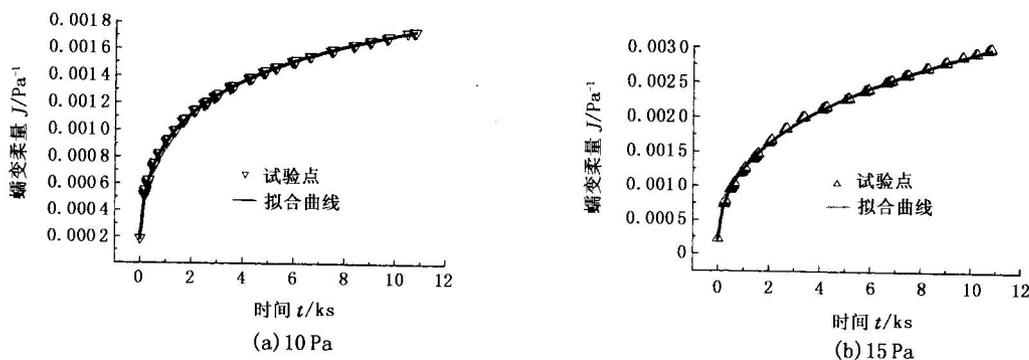


图 1 不同应力作用下蠕变柔量试验曲线的拟合

图 2 为标准粘弹性固体模型和粘弹性流体模型 (Burgers 模型) 拟合的 15 Pa 恒应力作用蠕变柔量的曲线,拟合相关参数值见表 2。

标准粘弹性固体模型蠕变柔量表达式为

$$J(t) = J_{\infty} - (J_{\infty} - J_0)e^{-\beta t} \quad (18)$$

由图 2 看出,标准粘弹性固体模型和粘弹性流

体模型都不能很好地拟合试验曲线,在蠕变的开始阶段偏差尤为明显,拟合其他应力作用下的蠕变柔量曲线也具有同样的缺点。可见本文中推导得到的分数阶导数类 Burgers 体蠕变模型用于描述胶凝原油的粘弹性蠕变过程具有显著优势。

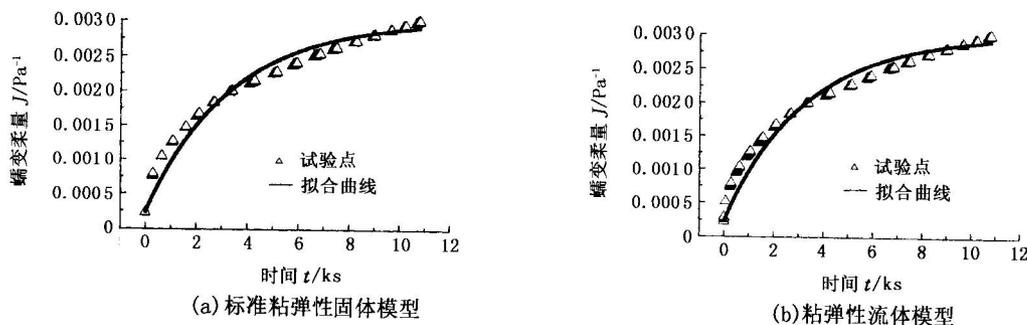


图 2 不同模型的蠕变柔量试验曲线的拟合

表 2 两种流变模型的拟合参数

| 模型类型    | $J_{\infty}/\text{Pa}^{-1}$ | $J_0/\text{Pa}^{-1}$ | $\beta$ | 粘度 $\eta/$<br>( $\text{TPa} \cdot \text{s}$ ) |
|---------|-----------------------------|----------------------|---------|---|
| 粘弹性固体   | 0.00301                     | 0.00022              | 0.003   |   |
| Burgers | 0.00301                     | 0.00022              | 0.003   | 0.2   |

### 2.2.2 胶凝原油的储存模量

通过频率扫描试验得到胶凝原油的储存模量曲线。图 3(a) 为类 Kelvin 固体模型迭代拟合的胶凝原油储存模量曲线,参数  $E = 15409.72 \text{ Pa}, \eta = 4967.72 \text{ Pa} \cdot \text{s}, \gamma = 0.45$ 。类标准线性体拟合胶凝原油的储存模量曲线和图 3(a) 类 Kelvin 模型的拟合曲线一样,都能与试验数据很好地吻合。拟合参数见表 3。图

3(b) 为标准线性体拟合的胶凝原油储存模量曲线。由图 3(b) 看出胶凝原油的储存模量在频率较低时增加较快,而标准线性体的拟合曲线在此阶段递增缓慢,与试验曲线不能很好地吻合。采用分数阶导数的类 Kelvin 固体模型和类标准线性体都能精确地拟合试验曲线,可见胶凝原油的粘弹特性更适合于采用分数阶导数的新流变模型理论来描述。

表 3 流变模型的拟合参数值

| 模型类型   | $E_{\infty}/\text{Pa}$ | $E_0/\text{Pa}$ | $\beta$ | $\gamma$ |
|--------|------------------------|-----------------|---------|----------|
| 类标准线性体 | 415586                 | 501546          | 100.04  | 0.46     |
| 标准线性体  | 23918.55               | 47391.85        | 40.15   |          |

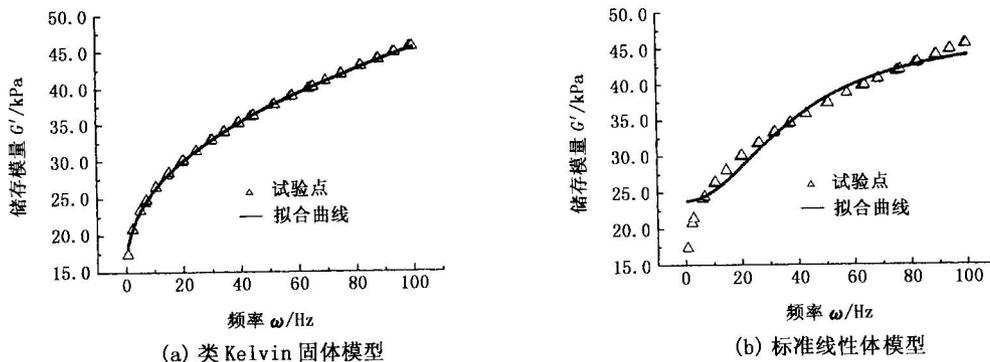


图3 储存模量试验曲线的拟合

### 3 结 论

(1) 由 Maxwell 体和分数阶导数的类 Kelvin 体组合建立了类 Burgers 体流变模型,并推导得到了分数阶导数类 Burgers 体的蠕变柔量表达式,通过试验验证了该模型能精确地描述胶凝原油的蠕变过程,而经典的标准粘弹性固体模型和粘弹性流体模型都不能很好地拟合蠕变试验曲线,在蠕变的开始阶段偏差尤为明显。

(2) 试验验证了分数阶导数的类 Kelvin 体和类标准线性体都能精确地描述胶凝原油的动态粘弹性,而经典的标准粘弹性固体模型同样也不适宜用来描述胶凝原油的动态粘弹性。

#### 参考文献:

[1] ROBERTO C D, ENRIQUE G A, CHÁVEZ A E. Viscoelastic models for Mexican heavy crude oil and comparison with a mixture of heptadecane and eicosane [J]. Fuel, 2006,85(4):559-568.

[2] MOUSSA Kane, MADELEINE Djabourov, Jean-Luc Volle. Rheology and structure of waxy crude oils in quiescent and under shearing conditions [J]. Fuel, 2004(83):1591-1605.

[3] VINAY G, WACHS A, FRIGAARD I. Start-up transients and efficient computation of isothermal waxy crude oil flows [J]. J Non-Newtonian Fluid Mech, 2007,143, 141-156.

[4] 张国忠,刘刚. 大庆胶凝原油启动屈服应力研究[J]. 石油大学学报:自然科学版,2005,29(6):91-93.  
ZHANG Guo-zhong, LIU Gang. Investigation on start-up yield stress of Daqing gelled crud oil[J]. Journal of the

University of Petroleum, China (Edition of Natural Science), 2005,29(6):91-93.

[5] 侯磊,张劲军. 大庆原油的粘弹性实验研究[J]. 石油学报,2005,26(6):109-112.  
HOU Lei, ZHANG Jin-jun. An experimental study on viscoelasticity of Daqing crude oil[J]. Acta Petrolei Sinica, 2005,26(6):109-112.

[6] SINGH P, FOGLER H S. Prediction of the wax content of the incipient wax-oil gel in a pipeline;an application of the controlled-stress rheometer[J]. Journal of Rheology, 1999,43(6):1437-1459.

[7] CHENG Chang, BOGER D V. The yielding of waxy crude oils[J]. Ind Eng Chem Res, 1998,37(4):1551-1559.

[8] 孙海忠,张卫. 分数算子描述的粘弹性材料的本构关系研究 [J]. 材料科学与工程学报, 2006,24(6):926-930.  
SUN Hai-zhong, ZHANG Wei. Study on constitutive relation of viscoelastic material described by fractional operator [J]. Journal of Materials Science & Engineering, 2006,24(6):926-930.

[9] 张为民. 一种采用分数阶导数的新流变模型理论[J]. 湘潭大学自然科学学报, 2001,23(1):30-36.  
ZHANG Wei-min. A new rheological model theory with fractional order derivatives [J]. Natural Science Journal of Xiangtan University, 2001,23(1):30-36.

[10] 张为民,张淳源. 分数指数模型的热力学分析及其应用[J]. 工程力学, 2002,19(2):95-99.  
ZHANG Wei-min, ZHANG Chun-yuan. Thermodynamic analysis and application of fractional exponential model [J]. Engineering Mechanics, 2002,19(2):95-99.

(编辑 沈玉英)